COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS

SUR LES

HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE ET DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Rédigées par **Henri VERGNE**,

Ingénieur des Arts et Manufactures, Docteur ès sciences mathématiques

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1911

LEÇONS

SUR LES

HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS

SUR LES

HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE ET DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Rédigées par Henri VERGNE,
Ingénieur des Arts et Manufactures, Docteur ès sciences mathématiques

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS
LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1911

PRÉFACE

Le problème de l'origine du Monde a de tout temps préoccupé tous les hommes qui réfléchissent ; il est impossible de contempler le spectacle de l'Univers étoilé sans se demander comment il s'est formé : nous devrions peut-être attendre pour chercher une solution que nous en ayons patiemment rassemblé les éléments, et que nous ayons acquis par là quelque espoir sérieux de la trouver ; mais si nous étions si raisonnables, si nous étions curieux sans impatience, il est probable que nous n'aurions jamais créé la Science et que nous nous serions toujours contentés de vivre notre petite vie. Notre esprit a donc réclamé impérieusement cette solution, bien avant qu'elle fût mûre, et alors qu'il ne possédait que de vagues lueurs, lui permettant de la deviner plutôt que de l'atteindre. Et c'est pour cela que les hypothèses cosmogoniques sont si nombreuses, si variées, qu'il en naît chaque jour de nouvelles, tout aussi incertaines, mais tout aussi plausibles que les théories plus anciennes, au milieu desquelles elles viennent prendre place sans parvenir à les faire oublier.

On pourrait penser que l'Univers a toujours été ce qu'il est aujourd'hui, que les êtres minuscules qui rampent à la surface des astres sont périssables, mais que les astres eux-mêmes ne changent pas, et qu'ils poursuivent glorieusement leur vie éternelle, sans se soucier de leurs misérables et éphémères parasites. Mais il y a deux raisons de rejeter cette manière de voir.

Le système solaire nous présente le spectacle d'une parfaite harmonie ; les orbites des planètes sont toutes presque circulaires, toutes à peu près dans un même plan, toutes parcourues dans le

même sens. Ce ne peut être l'effet du hasard ; on pourrait supposer qu'une intelligence infinie a établi cet ordre au début une fois pour toutes et pour toujours, et tout le monde se serait contenté autrefois de cette explication ; aujourd'hui on ne se satisfait plus à si bon marché ; certes il y a encore bien des gens qui tiennent un Dieu créateur pour une hypothèse nécessaire, mais ils ne conçoivent plus l'intervention divine comme le faisaient leurs devanciers ; leur Dieu est moins architecte et plus mécanicien ; et il reste alors à expliquer par quel mécanisme il a tiré l'ordre du chaos. Si l'ordre que nous constatons n'est pas dû au hasard, et si on renonce à l'attribuer à quelque décret divin immédiatement exécutoire, il faut qu'il ait succédé au chaos, il faut donc que les astres aient changé. Et c'est bien ainsi qu'a raisonné Laplace.

D'autre part, le second principe de la Thermodynamique, le principe de Carnot, nous apprend que le Monde tend vers un état final ; l'énergie « se dissipe », c'est-à-dire que le frottement tend constamment à transformer le mouvement en chaleur et que la température tend partout à s'uniformiser. L'état final du Monde est donc un état d'uniformité ; cet état, qu'il doit atteindre, n'est pas atteint encore ; donc le monde change et même il a toujours changé.

Et voilà le champ ouvert aux hypothèses ; la plus vieille est celle de Laplace ; mais sa vieillesse est vigoureuse, et, pour son âge, elle n'a pas trop de rides. Malgré les objections qu'on lui a opposées, malgré les découvertes que les astronomes ont faites et qui auraient bien étonné Laplace, elle est toujours debout, et c'est encore elle qui rend le mieux compte de bien des faits ; c'est elle qui répond le mieux à la question que s'était posée son auteur. Pourquoi l'ordre règne-t-il dans le système solaire, si cet ordre n'est pas dû au hasard ? De temps en temps une brèche s'ouvrait dans le vieil édifice ; mais elle était promptement réparée et l'édifice ne tombait pas.

On sait en quoi consiste cette hypothèse. Le système solaire est sorti d'une nébuleuse qui s'étendait autrefois au delà de l'orbite de Neptune ; cette nébuleuse était animée d'un mouvement de rotation

uniforme : elle ne pouvait être homogène, elle était condensée et même fortement condensée vers le centre ; elle était formée d'un noyau relativement dense qui est devenu le Soleil, entouré d'une atmosphère d'une ténuité extrême qui a donné naissance aux planètes. Elle se contractait par refroidissement, abandonnant de temps en temps à l'équateur des anneaux nébuleux ; ces anneaux étaient instables ou le devenaient promptement ; ils devaient donc se rompre et finalement se rassembler en une seule masse sphéroïdale.

Au moment où le système commence à se former, il y règne déjà un commencement d'ordre ; les mouvements internes de la nébuleuse ne sont pas capricieux et désordonnés : ils se ramènent à une rotation uniforme ; c'est cette harmonie initiale qui a produit l'harmonie finale que nous admirons, mais cette harmonie initiale est aisée à expliquer. Les frottements internes de la masse ont dû promptement détruire les irrégularités de ses mouvements intestins et ne laisser subsister qu'une rotation d'ensemble parfaitement régulière. Promptement ? Cela dépend du sens que l'on attache à ce mot ; les inégalités disparaîtront promptement si l'on regarde quelques milliards d'années comme un délai très court. Quand on veut faire le calcul en attribuant à la matière de la nébuleuse la viscosité des gaz que nous connaissons, on arrive à des chiffres fantastiques. Et ce n'est pas tout : le refroidissement même et la contraction qui en résulte tendent à troubler cette harmonie si lentement conquise, et, pour qu'elle se conserve, il faut que cette contraction et l'évolution entière du système soient aussi prodigieusement lentes. D'autant plus que l'on a établi qu'il faut des centaines de millions d'années pour que les diverses parties d'un même anneau, en se mouvant séparément suivant les lois de Képler, finissent par se choquer et se coller les unes aux autres ; phénomène qui ne doit être regardé pourtant que comme un court épisode dans l'évolution générale. Ces chiffres ne doivent pas nous effrayer : ils sont en désaccord avec l'âge que d'autres théories attribuent au Soleil et aux étoiles ; mais ces théories soulèvent de leur côté de grandes difficultés. Une réflexion toutefois s'impose ; d'autres systèmes semblables au nôtre devaient subir en même

temps la même évolution ; chacun d'eux occupait un espace considérable s'étendant bien au delà du rayon de notre Soleil actuel ; si cette évolution a duré trop longtemps, on est obligé de compter avec la probabilité d'un choc, venant tout détruire avant qu'elle soit terminée.

Pour Faye, l'origine des planètes est toute différente ; c'est à l'intérieur de la masse nébulaire elle-même que les planètes et le Soleil se sont différentiés ; dès qu'un commencement de condensation s'est produit en certains points, ces points sont devenus des centres d'attraction, ils ont attiré la matière environnante, s'en sont nourris pour ainsi dire, jusqu'à ce qu'ils aient fini par absorber toute l'atmosphère très ténue de la nébuleuse primitive et par se mouvoir dans le vide. Cette théorie conduit à de singulières conséquences : Mercure serait plus vieux que Neptune et la Terre elle-même plus vieille que le Soleil. Les planètes étaient autrefois beaucoup plus éloignées du Soleil, et Mercure par exemple était à la distance de Saturne ; elles se sont graduellement rapprochées de l'astre central en conservant des orbites circulaires. On ne peut pas dire que Faye ne rend pas compte de la faiblesse des excentricités et des inclinaisons ; du moins il cherche à le faire et il est bien décidé à donner les coups de pouce nécessaires pour obtenir ce résultat ; mais l'explication qu'il donne est bien imprécise et bien moins satisfaisante pour l'esprit que celle de Laplace. Il avait cru devoir abandonner les idées de Laplace, incapables d'après lui d'expliquer le mouvement rétrograde du satellite de Neptune. Il croyait, comme Laplace lui-même, que le sens de la rotation d'une planète dépend de la distribution des vitesses dans l'anneau qui lui a donné naissance. Nous savons aujourd'hui que cette distribution ne peut être qu'éphémère, puisque l'anneau est instable, qu'elle ne peut donc avoir aucune influence sur le résultat final ; que les rotations de toutes les planètes ont dû être primitivement rétrogrades quelle que soit leur origine, et que l'influence des marées a pu seule les rendre directes. Dans ces conditions, nous n'avons plus aucune raison de préférer l'hypothèse de Faye à celle de Laplace.

La théorie de M. du Ligondès dérive à la fois de celle de Faye et de celle de Kant. Pour lui, le point de départ, n'est plus la nébuleuse de Laplace, dont les mouvements sont déjà régularisés par le frottement, c'est un chaos véritable. Au lieu d'une masse gazeuse dont les diverses parties sont rendues plus ou moins solidaires les unes des autres par l'effet de la viscosité, et qui forme en tout cas un *continu*, nous n'avons plus qu'un essaim de projectiles se croisant au hasard dans tous les sens. Que sont ces projectiles ? Ce peuvent être des météorites solides, ou d'énormes bulles de gaz, peu importe ; entre eux il n'y a que le vide ou une atmosphère assez ténue pour ne pas gêner la liberté de leurs mouvements. De temps en temps ces mouvements sont troublés, soit parce que ces corps approchent beaucoup les uns des autres, soit parce qu'ils se choquent physiquement. Et ce sont ces chocs qui produisent l'évolution ; s'il n'y avait ni choc, ni résistance passive, ou même si les corps qui se choquent étaient parfaitement élastiques, ces projectiles, malgré l'attraction qu'ils exercent les uns sur les autres, pourraient circuler indéfiniment sans montrer aucune tendance à la concentration ; de même que, dans le vide, les planètes tourneraient perpétuellement autour du Soleil, sans jamais tomber sur l'astre qui les attire. Supposons au contraire deux planètes circulant en sens contraire sur la même orbite circulaire ; avant d'avoir décrit une demi-circonférence, elles se rencontreront, leur vitesse sera détruite par le choc, si on les suppose dépourvues d'élasticité, et elles tomberont ensemble sur le Soleil, augmentant ainsi la masse de l'astre central. De pareils chocs peuvent devenir fréquents dans un milieu constitué comme l'imagine M. du Ligondès ; il y a donc une concentration progressive de la masse ; on la voit peu à peu s'organiser, les planètes et le Soleil se différentient, puis se nourrissent de la matière qui les entoure et finissent par tout absorber. On peut montrer que par le jeu même de ces chocs, on arrive à un système d'orbites peu excentriques et peu inclinées. Bien que se faisant au hasard et pour ainsi dire aveuglément, ces chocs transforment le chaos en un cosmos admirablement réglé, où l'uniformité primitive a fait place à la variété, mais à une variété harmonieuse.

La nébuleuse de M. du Ligondès, sillonnée en tous sens par des projectiles se mouvant au hasard, ressemble beaucoup au gaz de la théorie cinétique. Peu importe que les projectiles soient de taille très différente, puisque dans un cas ce sont des atomes et dans l'autre des météorites, ou de petits astres. Et cependant la Thermodynamique et la théorie cinétique nous enseignent que les gaz, comme le monde physique tout entier, tendent sans cesse vers l'uniformité. Les lois du hasard et celles des grands nombres tendent à niveler très rapidement les inégalités que le gaz peut présenter, jusqu'à ce que la température et les vitesses deviennent uniformes dans toute la masse. Prenons comme point de départ un système de molécules gazeuses dont les vitesses, au lieu d'être fortuitement réparties, seraient harmonieusement distribuées, de manière à faire une sorte de cosmos pareil au système solaire ; au bout de peu de temps, nous serons retombés dans le chaos, les masses primitivement différentiées se seront confondues en une seule, les vitesses seront de nouveau réparties suivant la loi de Maxwell, qui est celle du hasard. Comment deux mécanismes en apparence idendiques ont-ils pu produire deux effets opposés ? La réponse est aisée : dans la théorie cinétique des gaz, on regarde les molécules gazeuses comme parfaitement élastiques, il n'y a rien qui ressemble à une résistance passive, la force vive n'est jamais détruite ; dans l'hypothèse de M. du Ligondès, les corps en se choquant perdent leur force vive, au moins en partie, et la transforment en chaleur ; nous avons vu que c'était là l'origine d'une tendance à la concentration et par conséquent à la différentiation. Nos projectiles peuvent donc subir deux sortes de perturbations ; de brusques déviations causées par l'attraction newtonienne, quand deux masses viennent à se rapprocher sans se toucher, et des chocs physiques. Les premières perturbations, de beaucoup les plus fréquentes, se font sans perte de force vive, elles sont tout à fait assimilables aux chocs des molécules gazeuses dans la théorie cinétique : elles tendent donc à maintenir le chaos, ou même à le rétablir, et à faire régner partout la loi de Maxwell. Les chocs physiques au contraire entraînent des résis-

tances passives; c'est à eux que nous devons l'organisation du cosmos.

Et alors une réflexion s'impose : on admet en général que les atomes ne sont soumis à aucune résistance passive, de sorte qu'ils se comportent dans le choc comme des corps élastiques : ils suivent ainsi sans restriction les lois de la Mécanique théorique. Si les corps de dimension sensible semblent s'en écarter à tel point que les phénomènes observés sont irréversibles, c'est qu'ils se composent d'atomes très nombreux et que la loi des grands nombres intervient. Cela va bien si les atomes sont eux-mêmes regardés comme des points matériels et si le mot « atome » doit être entendu au sens étymologique ; mais il est loin d'en être ainsi : les éléments d'un gaz dans la théorie cinétique sont les « molécules » et chacune d'elles contient plusieurs atomes chimiques ; chaque atome à son tour est formé d'électrons, et il serait puéril de supposer qu'on n'ira jamais plus loin et que les électrons ne se résoudront pas un jour en éléments plus petits. Une molécule en un mot est un édifice aussi compliqué que le système solaire ; ses éléments ultimes très nombreux doivent obéir à la loi des grands nombres, de sorte que dans l'intérieur de l'atome lui-même, il y aura des résistances passives. Ne pourrait-on concevoir que ces résistances jouent le même rôle que dans la théorie de M. du Ligondès et ne pourraient-elles tendre à produire la différentiation à l'encontre du principe de Carnot ?

Dans la théorie de M. See, les planètes ne se sont pas détachées du Soleil, non plus que la Lune de la Terre. Tous ces astres ont eu de tout temps une existence individuelle.

Les planètes ont été *captées* par le Soleil et la Lune par la Terre. Comment s'est faite cette capture ? Le Soleil était autrefois entouré d'une atmosphère ; dès qu'un astre vagabond y pénétrait, il éprouvait une résistance ; son orbite, d'abord hyperbolique devenait elliptique par suite de la diminution de vitesse : puis elle se rapprochait de la forme circulaire, en même temps que son rayon décroissait. L'astre ainsi capté aurait fini par tomber sur le Soleil, s'il avait continué à subir la résistance de l'atmosphère solaire,

mais cette atmosphère absorbée par le Soleil est devenue de plus en plus ténue et a fini un jour par disparaître ; à partir de ce moment les orbites des planètes n'ont plus varié. Cette théorie rend bien compte de la faiblesse des excentricités, mais elle n'explique pas celle des inclinaisons.

Il ne faudrait pas croire que si notre système solaire a évolué dans le passé, il a atteint aujourd'hui son état définitif; que l'atmosphère plus ou moins ténue dans laquelle nageaient pour ainsi dire les corps célestes ayant été résorbée et ayant disparu, les planètes, désormais séparées les unes des autres par le vide, sont ainsi soustraites à une résistance passive. Même à distance, ces résistances peuvent entrer en jeu ; on sait qu'on a construit des moteurs qui utilisent la puissance des marées ; ces moteurs ne peuvent créer de l'énergie, il faut qu'ils l'empruntent à une source quelconque, et cette source ne peut être que la force vive des corps célestes. Si l'homme n'avait pas construit de moteurs, l'énergie ainsi empruntée n'aurait pas été utilisée, elle se serait perdue inutilement en frottements, en chocs des vagues sur les côtes ; mais dans un cas comme dans l'autre, la force vive des astres va sans cesse en diminuant ; la vitesse de rotation de la Terre diminue constamment, mais avec une extrême lenteur ; cela est arrivé beaucoup plus rapidement pour la Lune et le processus s'est poursuivi jusqu'à ce que la durée de sa rotation soit devenue exactement égale à celle de sa révolution ; de telle sorte que notre satellite nous présente toujours la même face.

Ce phénomène a joué dans l'évolution cosmogonique un rôle que Sir G. H. Darwin a bien mis en évidence. Deux causes tendaient à modifier la rotation des planètes ; l'action des marées dont nous venons de parler tendait à la ralentir et, plus exactement, à lui donner même sens et même durée qu'à la révolution de l'astre autour du Soleil ; d'autre part, le refroidissement et la contraction, en diminuant le moment d'inertie, tendait au contraire à l'accélérer. La première de ces deux causes a transformé la rotation des planètes primitivement rétrograde en une rotation directe de même durée que la révolution orbitale ; c'est ensuite que la seconde

cause, devenue prépondérante, a donné à ces planètes une rotation qui est restée directe, mais qui est devenue beaucoup plus rapide.

La durée du jour va donc sans cesse en augmentant, mais, par une sorte de réaction, celle du mois augmente également, la Lune s'éloigne constamment de la Terre. Au moment de sa formation, notre satellite touchait presque la surface de notre globe ; le mois et le jour avaient même durée, cinq ou six de nos heures actuelles ; en revanche, quand de longs siècles seront écoulés, le mois et le jour redeviendront égaux entre eux, à peu près égaux à deux de nos mois actuels, et la Terre présentera toujours la même face à la Lune, comme la Lune à la Terre.

Toutes ces hypothèses, si divergentes d'ailleurs, ont un caractère commun ; ce sont des théories de Mécanique rationnelle, d'Astronomie mathématique ; elles font peu d'emprunts aux sciences physiques ; elles sont par là incomplètes. Les physiciens, dont l'intervention était aussi inévitable qu'elle était désirable, se sont surtout préoccupés de l'origine de la chaleur solaire. Des mesures précises nous ont montré l'étonnante dépense de chaleur que fait le Soleil à chaque seconde. Quelles ressources a-t-il qui lui permettent une telle prodigalité ? Où a-t-il pu emmagasiner une provision d'énergie suffisante pour des millions d'années ? Et quelle a pu être l'origine de cette provision ? On a pu penser d'abord que cette énergie était d'origine chimique, le Soleil brûlerait comme un gros morceau de charbon : cette hypothèse n'est pas tenable ; à ce compte, le Soleil n'aurait été qu'un feu de paille éphémère, à peine capable d'éclairer les hommes pendant la durée de l'histoire.

Et alors Lord Kelvin et Helmholtz ont pensé que l'énergie solaire pouvait être d'origine mécanique ; on a songé d'abord aux météorites qui tombent comme une pluie constante à sa surface, et dont la force vive est constamment détruite et transformée en chaleur. Cela ne suffisait pas encore ; mais si les divers matériaux dont est formé le Soleil ont été autrefois séparés par de grandes distances et se sont ensuite concentrés sous l'influence de l'attraction, le travail de cette attraction a dû être énorme ; s'il s'est transformé en force vive, puis en chaleur, nous avons une provision de cha-

leur dix mille fois plus grande que celle que donnerait la combustion d'un globe de charbon gros comme le Soleil.

La nébuleuse solaire a sans doute été froide au début et elle s'est échauffée parce qu'elle se contractait.

Nous voilà bien loin de la nébuleuse de Laplace, primitivement très étendue parce qu'elle était très chaude et qui se contractait parce qu'elle se refroidissait. On est ainsi amené à se demander comment va se comporter une masse gazeuse soumise à la gravitation; elle ne peut perdre de la chaleur sans se refroidir, ni se refroidir sans se contracter, ni se contracter sans s'échauffer. Que va-t-il en résulter en somme? Sa température va-t-elle s'élever bien qu'elle perde de la chaleur par rayonnement, comme si sa chaleur spécifique était négative? Ou bien enfin allons-nous avoir à la fois contraction et refroidissement? On peut donner une réponse à cette question s'il s'agit d'un gaz parfait: s'il est monoatomique ou diatomique, il se contractera quand il perdra de la chaleur par rayonnement, mais sa température augmentera, il se comportera comme si sa chaleur spécifique était négative; au contraire, il se contractera en se refroidissant, s'il est polyatomique ou bien encore s'il est assez condensé pour s'écarter notablement des lois d'un gaz parfait.

Quoi qu'il en soit, on n'aura ainsi de chaleur que pour 50 millions d'années; et alors les transformistes et les géologues ont jeté les hauts cris : « Cinquante millions d'années, qu'est-ce que c'est que cela! Comment voulez-vous qu'en aussi peu de temps, nous fassions évoluer les espèces, que nous engloutissions des continents et que nous en fassions surgir de nouveaux, que nous élevions deux chaînes de montagnes pareilles aux Alpes, comme les chaînes calédonienne et hercynienne et que nous les rasions ensuite par le lent mécanisme de l'érosion? » Ces plaintes paraissent légitimes, et il faut bien 200 millions d'années depuis le début du dévonien; mais alors d'où vient la chaleur solaire, si son origine n'est ni mécanique, ni chimique au sens ordinaire du mot? La question paraissait sans réponse quand on a découvert le radium. Lui seul paraissait capable de tout expliquer; tout au

moins il nous montrait qu'il reste bien des mystères à découvrir et qu'il ne faut pas se hâter d'affirmer qu'un phénomène est inexplicable.

La théorie de Laplace, comme toutes celles que nous venons d'exposer, ne sort pas des limites du système solaire. Laplace sans aucun doute ne négligeait pas de propos délibéré les autres systèmes, mais il pensait qu'ils devaient tous être plus ou moins semblables au nôtre et que ce qui convenait à l'un convenait aux autres. D'ailleurs ils lui semblaient séparés par de trop grandes distances pour pouvoir réagir les uns sur les autres. Les progrès de l'astronomie stellaire ne nous permettent plus de nous attarder à ce point de vue ; le télescope nous revèle dans le ciel étoilé une variété beaucoup plus riche que tout ce qu'on aurait pu attendre. Nous avons d'abord les étoiles doubles, qui sont loin d'être des exceptions; on peut estimer que sur trois étoiles il y a *pour le moins* une étoile double. Parfois les deux composantes sont faciles à séparer, parfois aussi elles se touchent presque et, si l'une d'elles est peu lumineuse, des éclipses périodiques se traduisent pour nous par des variations d'éclat. C'est alors la spectroscopie ou la photométrie qui nous apprennent que nous avons affaire à un système double et qui nous permettent d'en déterminer l'orbite. Est-il possible que le même mécanisme ait pu donner naissance à un système comme le nôtre où un corps central a absorbé la presque totalité de la masse et où des planètes minuscules sont séparées par des distances énormes ; et à un de ces systèmes singuliers où la masse est à peu près également partagée entre deux ou trois composantes et où, dans certains cas, les distances des astres sont comparables à leurs dimensions ?

A ces systèmes doubles, la théorie de Laplace n'est évidemment pas applicable (et d'ailleurs les excentricités ne sont généralement pas très petites) ; mais on peut imaginer d'autres hypothèses ; considérons une nébuleuse en rotation comme celle de Laplace, mais qui en diffère parce que sa masse, au lieu d'être concentrée presque tout entière dans un noyau central, est à peu près uniformément répartie. En se refroidissant, elle se contractera et sa

rotation va s'accélérer ; elle s'aplatira de plus en plus ; quand l'aplatissement aura dépassé une certaine limite, elle s'allongera dans un sens de façon à présenter trois axes inégaux ; c'est la figure que, dans le cas d'homogénéité parfaite, on appelle un ellipsoïde de JACOBI ; plus tard encore cette figure s'étranglera dans sa partie médiane et finira par se diviser en deux masses, inégales sans doute, mais comparables. Il est possible que ce soit là l'origine des étoiles doubles ; mais sans sortir de notre système solaire, il est possible que ce soit également celle de la Lune. Ce satellite est plus petit que la Terre, mais le rapport des masses est loin d'être aussi faible que pour les satellites de Jupiter, de Saturne, ou même de Mars.

Ce n'est pas tout : les étoiles simples elles-mêmes ne sont pas toutes pareilles entre elles ; le spectroscope nous a montré combien elles diffèrent, et il est assez naturel de supposer qu'elles diffèrent surtout par l'âge et que les différents types spectraux correspondent à différents types de l'évolution. Si même elles se sont toutes formées en même temps, il peut y avoir bien des raisons pour lesquelles certaines d'entre elles ont vieilli plus vite que les autres. D'autres objets sollicitent encore l'attention de l'astronome : il y a d'abord les amas stellaires, puis les nébuleuses dont les unes sont résolubles, tandis que les autres montrent par leur spectre qu'elles sont entièrement formées d'un gaz très subtil. Ces nébuleuses présentent les formes les plus variées, disques, anneaux, spirales ou amas irréguliers. Les premiers qui les ont examinées avec quelque soin ont été naturellement conduits à les assimiler à la nébuleuse de LAPLACE, ou à celles des théories rivales qui admettent toutes le même point de départ. Ces nébuleuses sont-elles de futures étoiles ou de futurs amas d'étoiles ; on était d'abord invinciblement porté à le penser ; on en est bien moins sûr aujourd'hui.

Il semble que nous avons sous les yeux des objets qu'il suffit de comparer pour reconstruire tout le passé des astres, comme le naturaliste qui a dans le champ de son microscope des cellules présentant toutes les phases de la division cellulaire, et qui peut

reconstituer à coup sûr toute l'histoire de cette division, bien que ces cellules soient désormais fixées et inertes.

La cosmogonie va-t-elle donc sortir de l'âge des hypothèses et de l'imagination pour devenir une science expérimentale, ou tout au moins une science d'observation? Bien mieux, de temps en temps nous voyons naître une étoile, qui s'allume inopinément dans le Ciel, pour diminuer promptement d'éclat et prendre un spectre qui rappelle celui des nébuleuses planétaires; de sorte qu'on n'a jamais vu une nébuleuse se transformer en étoile comme le voulait LAPLACE (1), et que, au contraire, on a vu souvent une étoile se transformer en nébuleuse. La nature n'est-elle pas là surprise en flagrant délit dans sa fonction créatrice?

Il ne faut pas pourtant se leurrer de vaines illusions; de trop grandes espérances seraient au moins prématurées. Et ce qui le prouve, c'est la diversité des opinions des astronomes sur l'évolution des étoiles, et en particulier sur l'origine des étoiles nouvelles. La première pensée, la plus naturelle, a été que les nébuleuses sont extrêmement chaudes et représentent la première phase de l'évolution, et pour ainsi dire l'enfance des astres, et qu'on rencontre ensuite les étoiles blanches, puis les étoiles jaunes et enfin les étoiles rouges de plus en plus vieilles et en même temps de plus en plus froides. Pour Sir N. LOCKYER, l'histoire du monde stellaire a été plus compliquée; les nébuleuses, sont au contraire très froides (et sur ce point je crois que tout le monde est aujourd'hui d'accord et qu'on regarde la lumière dont elles brillent comme d'origine électrique). Elles ne sont en réalité qu'un essaim de météorites; par leurs chocs incessants, ces météorites s'échauffent, se vaporisent et forment finalement une masse gazeuse extrêmement chaude, en un mot une étoile; les chocs ont alors cessé et le calme renaît; par l'effet du rayonnement, l'étoile se refroidit peu à peu et finit par s'éteindre et s'encroûter; elle repasse dans l'ordre inverse par les stades de température

(1) Il ne faut pas tirer de là un argument contre la théorie de Laplace. l'illustre astronome n'ayant jamais prétendu qu'une nébuleuse devait se transformer en étoile en quelques jours ou en quelques mois.

qu'elle a parcourus dans son ascension, de sorte que le cycle complet sera : nébuleuse, étoile rouge, étoile jaune, étoile blanche, étoile jaune, étoile rouge, étoile éteinte. Les étoiles de la série ascendante sont néanmoins bien différentes des étoiles correspondantes de la série descendante ; toute la masse des premières est brassée par de violents courants de convection ; les météorites n'ont pas encore entièrement disparu et leurs chocs entretiennent l'agitation ; les secondes jouissent d'un calme relatif ; Sir N. Lockyer croit pouvoir distinguer cette différence par l'étude de leurs spectres.

Les *Novæ*, depuis l'époque de Tycho-Brahé, ont surexcité l'imagination des astronomes. Leur apparition est brusque et a les allures d'un cataclysme. Est-ce une éruption qui serait en grand analogue à celles qui produisent les protéburances solaires ? On a mieux aimé recourir à l'hypothèse d'un choc, et c'est en effet l'idée que l'aspect de ces phénomènes nous suggère irrésistiblement. Mais il y a bien des façons de comprendre les circonstances et les effets d'un choc. Sont-ce deux corps solides qui s'échauffent subitement dès que leur rencontre a détruit leur force vive ? Est-ce un corps solide énorme, ou une étoile peu brillante, ou encore un essaim de météorites qui pénètre dans une nébuleuse et qui doit son incandescence au frottement ? Ou bien encore, comme le veut Arrhenius, les soleils encroûtés ne conservent-ils pas dans leurs flancs une provision d'énergie énorme, sous forme radioactive par exemple ? Cette provision qui demeure inutilisée et comme latente, tant qu'elle reste emprisonnée dans la croûte, ne peut-elle être libérée subitement, si un choc vient à briser cette croûte ? Elle se dépense alors en peu de temps ; de sorte que le choc produirait de la chaleur, non comme quand une balle a frappé une cuirasse qu'elle n'a pu traverser et qu'elle retombe toute rougie sur le sol ; mais comme quand la fusée d'un obus chargé de matières explosives détone à la rencontre d'un obstacle. Il est certain que les *Novæ* se montrent souvent entourées de nébulosités ; mais ces nébulosités sont-elles la cause ou l'effet du phénomène ; est-ce parce que l'étoile les a rencontrées qu'elle est subitement devenue

brillante : ou est-ce quelque déchet qu'elle rejette de son sein et comme la fumée de l'explosion. De tout cela nous ne savons rien.

Le mystère s'accroît quand au lieu de considérer chaque étoile en particulier, on en envisage l'ensemble et qu'on réfléchit sur leurs mutuels rapports. Les étoiles ont-elles pris naissance en même temps, ou s'allument-elles successivement, pendant que d'autres s'éteignent ? Si elles ont même date de naissance, les unes ont-elles vieilli plus vite que les autres, et est-ce pour cette raison qu'elles sont aujourd'hui différentes ? Mais alors à côté des étoiles brillantes, n'y a-t-il pas, en beaucoup plus grand nombre, des étoiles éteintes dont la masse inutile encombre les cieux ? Comment pouvons-nous le savoir ? Peut-être les considérations suivantes, dont la première idée est due à Lord Kelvin, peuvent-elles aider à résoudre la question. La Voie Lactée est formée d'étoiles fort nombreuses, s'attirant mutuellement et se mouvant dans tous les sens ; elle nous offre donc l'image d'un gaz, dont les molécules s'attirent et sont animées de vitesses dans les directions les plus diverses ; chaque étoile joue ainsi le rôle d'une molécule gazeuse. Cette assimilation semble légitime et l'on peut songer à étendre à l'univers stellaire les résultats de la théorie cinétique des gaz. Un gaz soumis à l'attraction newtonienne prendra au bout de peu de temps un état d'équilibre adiabatique où les vitesses moléculaires obéiront à la loi de Maxwell et où la température croîtra vers le centre ; la température centrale dépendra de la masse totale du gaz et de son volume total. Cette température est mesurée par les vitesses moléculaires. Appliquons ces principes à la Voie Lactée ; les vitesses stellaires que nous observons appartiennent aux astres voisins de nous et par conséquent du centre de la Voie Lactée : elles correspondent donc à la « température centrale », et elles peuvent nous renseigner sur les dimensions et sur la masse totale de cette agglomération d'étoiles assimilée à une énorme bulle gazeuse. On trouve ainsi que le télescope en a presque atteint les limites extrêmes, et qu'il doit y avoir peu d'étoiles obscures ; si en effet il y en avait beaucoup plus que d'astres brillants, elles concour-

raient à l'attraction totale et les mouvements propres des étoiles seraient beaucoup plus grands que ceux qu'on a observés.

Cela paraît reposer sur des raisonnements irréfutables; si la Voie Lactée a atteint l'état stable vers lequel elle tend nécessairement, tout ce que nous venons de dire est vrai, et les mouvements propres doivent être répartis conformément à la loi de Maxwell. Le sont-ils? l'observation seule peut répondre; or il paraît bien qu'elle répond, non. D'après Kapteyn et d'autres astronomes tout se passe comme si on se trouvait en présence de deux essaims d'étoiles, obéissant séparément à la loi de Maxwell, *mais avec des constantes différentes*; ces deux essaims se pénètrent d'ailleurs mutuellement et ne sont pas séparés. Il semble que deux voies lactées qui avaient atteint leur état d'équilibre final se sont un jour rencontrées, et n'ont pas encore exercé l'une sur l'autre une action assez prolongée pour que les différences qui les distinguent se soient entièrement nivelées. Elles sont semblables à deux bulles gazeuses qui se seraient rencontrées, mais n'auraient pas encore eu le temps de se mélanger. Nous retrouvons ainsi, sous une forme nouvelle et inattendue, cette intervention du choc, dont l'importance cosmogonique a été mise en évidence par l'étude des *Novæ*, et que nous retrouvons à la base de certaines théories, telles que celle de M. Belot.

Si néanmoins les conclusions de Lord Kelvin subsistent dans leurs traits généraux, et si le nombre des étoiles éteintes n'est pas énorme, nous devons penser que tous les flambeaux de notre ciel se sont allumés à peu près en même temps et que l'âge de la Voie Lactée ne dépasse pas un petit nombre de vies d'étoiles.

L'une des théories cosmogoniques les plus récentes, et à coup sûr l'une des plus originales, est celle de M. Svante Arrhenius. Pour lui, les astres ne sont pas, comme on le pense d'ordinaire, des individus à peu près étrangers les uns aux autres, séparés par des vides immenses et n'échangeant guère que leurs attractions et leur lumière; ils échangent bien d'autres choses, de l'électricité, de la matière et jusqu'à des germes vivants. La pression de radiation est une force qui émane des corps lumineux et qui repousse

les corps légers, c'est elle qui forme les queues des comètes dont la matière très ténue est repoussée par la lumière du Soleil. C'est elle aussi qui, d'après M. Arrhenius, chasserait du Soleil de très petites particules, et les pousserait jusque sur la Terre, jusqu'aux planètes et jusqu'aux lointaines nébuleuses. Ces particules finiraient par s'agglutiner en formant les météorites ; et ces météorites, pénétrant dans la masse des nébuleuses, deviendraient des centres de condensation autour desquels la matière commencerait à se concentrer ; nous retrouvons ensuite toute l'histoire des étoiles, leur naissance presque obscure, leur splendeur, leur décadence aboutissant à l'encroûtement final. Cet encroûtement ne serait pas toutefois la mort définitive ; mais seulement le début d'une longue période de vie latente, obscure et silencieuse jusqu'au jour où un choc libérerait brusquement cette énergie endormie. L'explosion qui en résulterait donnerait naissance à une nébuleuse et le cycle recommencerait.

La vie latente doit être beaucoup plus longue que la vie brillante ; d'où il suit qu'il doit y avoir beaucoup plus d'étoiles obscures que d'étoiles visibles, contrairement aux vues de Lord Kelvin.

Pour M. Arrhenius, le monde est infini et les astres y sont distribués d'une façon sensiblement uniforme ; si nos télescopes semblent assigner des limites à l'Univers, c'est parce qu'ils sont trop faibles, et que la lumière qui nous vient des soleils les plus éloignés est absorbée en route. On a fait à cette hypothèse une double objection. D'une part, si la densité des étoiles est constante dans tout l'espace, leur lumière totalisée devrait donner au Ciel entier l'éclat même du Soleil. Cela serait vrai si le vide interstellaire laissait passer toute la lumière qui le traverse sans en rien garder, de sorte que l'éclat apparent d'un astre varierait en raison inverse du carré de la distance. Il suffit, pour échapper à cette difficulté, de supposer que le milieu qui sépare les étoiles est absorbant ; il peut d'ailleurs l'être très peu. L'autre objection, c'est que l'attraction newtonienne serait infinie ou indéterminée ; pour nous tirer d'affaire, il nous faut alors supposer que la loi de Newton n'est pas

rigoureusement exacte, et que la gravitation subit une sorte d'absorption, se traduisant par un facteur exceptionnel. Si on consent à faire cette hypothèse, les conclusions de Lord Kelvin ne s'imposent plus, car nous les avons établies en partant de la loi de Newton ; la Voie Lactée ne serait plus assimilable à une bulle gazeuse dont la densité et la température augmente vers le centre, mais à ce que nous pouvons voir d'une masse gazeuse *indéfinie* et homogène, de densité et de température uniforme.

Ce n'est pas tout : le monde de M. Arrhenius n'est pas seulement infini dans l'espace, mais il est éternel dans le temps ; c'est surtout ici que ses vues sont géniales et qu'elles nous apparaissent comme suggestives, quelques objections qu'elles soulèvent d'ailleurs. L'Univers est comme une vaste machine thermique, fonctionnant entre une source chaude et une source froide ; la source chaude est représentée par les Étoiles et la source froide par les nébuleuses. Mais nos machines thermiques ne tarderaient pas à s'arrêter, si on ne leur fournissait sans cesse de nouveaux combustibles ; abandonnées à elles-mêmes, les deux sources s'épuiseraient, c'est-à-dire que leurs températures s'égaliseraient et finiraient par se mettre en équilibre. C'est là ce qu'exige le principe de Carnot. Et ce principe lui-même est une conséquence des lois de la Mécanique statistique. C'est parce que les molécules sont très nombreuses qu'elles tendent à se mélanger et à ne plus obéir qu'aux lois du hasard. Pour revenir en arrière, il faudrait les *démêler*, détruire le mélange une fois fait ; et cela semble impossible ; il faudrait pour cela le démon de Maxwell, c'est-à-dire un être très délié et très intelligent, capable de trier des objets aussi petits.

Pour que le monde pût recommencer indéfiniment, il faudrait donc une sorte de démon de Maxwell automatique. Ce démon, M. Arrhenius croit l'avoir trouvé. Les nébuleuses sont très froides, mais très peu denses, très peu capables par conséquent de retenir par leur attraction les corps en mouvement qui tendent à en sortir. Les molécules gazeuses sont animées de vitesses diverses, et plus les vitesses sont grandes *en moyenne* plus le gaz est chaud. Le

rôle du démon de MAXWELL, s'il voulait refroidir une enceinte, serait de trier les molécules *chaudes*, c'est-à-dire celles dont la vitesse est grande et de les expulser de l'enceinte, où ne resteraient que les molécules *froides*. Or, les molécules qui ont le plus de chances de s'échapper de la nébuleuse, sans y être retenues par la gravitation, ce sont précisément les molécules à grande vitesse, les molécules chaudes; les autres restant seules, la nébuleuse pourra rester froide tout en recevant de la chaleur.

On peut tenter de se placer à d'autres points de vue, de dire par exemple qu'ici la véritable source froide, c'est le vide avec la température du zéro absolu et qu'alors le rendement du cycle de CARNOT est égal à 1. D'autre part, ce qui distingue la chaleur de la force vive mécanique, c'est que les corps chauds sont formés de molécules nombreuses dont les vitesses ont des directions diverses, tandis que les vitesses qui produisent la force vive mécanique ont une direction unique; réunies, les molécules gazeuses forment un gaz qui peut être froid et dont le contact refroidit; isolées, au contraire, elles seraient des projectiles dont le choc réchaufferait. Or, dans le vide interplanétaire, elles sont séparées par d'énormes distances et pour ainsi dire isolées; leur énergie s'élèverait donc en dignité, elle cesserait d'être de la simple « Chaleur » pour être promue au rang de « Travail ».

Bien des doutes subsistent toutefois; le vide ne va-t-il pas se combler, si le monde est infini; et, s'il ne l'est pas, sa matière en s'échappant, ne va-t-elle pas s'évaporer jusqu'à ce qu'il ne reste rien? De toutes manières, nous devrions renoncer au rêve du « Retour éternel » et de la perpétuelle renaissance des mondes; il semble donc que la solution de M. ARRHENIUS est encore insuffisante; ce n'est pas assez de mettre un démon dans la source froide, il en faudrait encore un dans la source chaude.

Après cet exposé, on attend sans doute de moi une conclusion, et c'est cela qui m'embarrasse. Plus on étudie cette question de l'origine des astres, moins on est pressé de conclure. Chacune des théories proposées est séduisante par certains côtés. Les unes donnent d'une façon très satisfaisante l'explication d'un certain

nombre de faits ; les autres embrassent davantage, mais les explications perdent en précision ce qu'elles gagnent en étendue ; ou bien, au contraire, elles nous donnent une précision trop grande, mais qui n'est qu'illusoire et qui sent le coup de pouce.

S'il n'y avait que le système solaire, je n'hésiterais pas à préférer la vieille hypothèse de Laplace ; il y a très peu de choses à faire pour la remettre à neuf. Mais la variété des systèmes stellaires nous oblige à élargir nos cadres, de sorte que l'hypothèse de Laplace, si elle ne doit pas être entièrement abandonnée, devrait être modifiée de façon à n'être plus qu'une forme, adaptée spécialement au système solaire, d'une hypothèse plus générale qui conviendrait à l'Univers tout entier et qui nous expliquerait à la fois les destins divers des Étoiles, et comment chacune d'elles s'est fait sa place dans le grand tout.

Or, sur ce point, les données sont insuffisantes et nous avons encore beaucoup à attendre de l'observation. Les deux courants d'étoiles de Kapteyn existent-ils et y en a-t-il d'autres ? Que sont les nébuleuses et en particulier les nébuleuses spirales ? Sont-elles à des distances énormes, en dehors de la Voie Lactée, et sont-elles elles-mêmes des voies lactées vues de loin ? Ou bien, malgré la nature de leur spectre, sont-elles incapables d'être assimilées à des amas de vraies étoiles ; devons-nous accepter la mesure de Bohlin au sujet de la parallaxe de la nébuleuse d'Andromède et la conclusion que See en tire, et qui nous représenterait cet objet céleste comme formé de soleils sans doute, mais de soleils gros comme les astéroïdes qui circulent entre Mars et Jupiter ? Est-il possible d'admettre que notre système solaire soit sorti d'une des espèces de nébuleuses que nous connaissons, par exemple des nébuleuses spirales, ou planétaires, ou annulaires ? Voilà une question à laquelle on ne pourra tenter de répondre que quand on connaîtra mieux la nature, la distance et par conséquent les dimensions de ces corps.

Un fait qui frappe tout le monde, c'est la forme spirale de certaines nébuleuses ; elle se rencontre beaucoup trop souvent pour qu'on puisse penser qu'elle est due au hasard. On comprend

combien est incomplète toute théorie cosmogonique qui en fait abstraction. Or, aucune d'elles n'en rend compte d'une manière satisfaisante et l'explication que j'ai donnée moi-même un jour, par manière de passe-temps, ne vaut pas mieux que les autres. Nous ne pouvons donc terminer que par un point d'interrogation.

Henri Poincaré.

LEÇONS

SUR

LES HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSE DE KANT.

1. Emmanuel Kant a exposé ses idées sur la constitution et l'origine de l'Univers dans un Ouvrage publié en 1755 sous le titre *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* (¹), et il les a reproduites en 1763 dans un autre écrit : *Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes*. Nous empruntons au Livre de H. Faye : *Sur l'Origine du Monde* (Paris, Gauthier-Villars, 4ᵉ édit., 1907, p. 131 et suiv.) la traduction de quelques passages du grand philosophe allemand.

« Les conditions mécaniques du système planétaire dont toutes les parties tournent dans le même sens autour du Soleil, dans des cercles couchés à peu près sur le même plan de son équateur, ont frappé tous les chercheurs. Tous se sont accordés à y voir l'effet d'un mouvement d'ensemble déterminé par quelque cause naturelle. De là, les tourbillons de Descartes qui ont conservé des adhérents longtemps après que Newton eut prouvé qu'il n'y avait au ciel rien de semblable, et que les queues des comètes traversaient ces prétendus tourbillons sans s'y laisser dévier. » (p. 132.)

Ainsi, Descartes avait rempli l'espace de ses tourbillons, tandis que Newton avait montré qu'il est vide de toute matière pondérable. Kant cherchera alors à expliquer les particularités du système pla-

(¹) On trouvera la traduction complète de cet Ouvrage à la fin du Livre de C. Wolf : *Les Hypothèses cosmogoniques* (Paris, Gauthier-Villars, 1886).

nétaire, en supposant que l'espace, actuellement vide, ne l'a pas toujours été. Il admet qu'à l'origine la matière qui compose les astres était répandue dans tout l'espace, où elle formait une sorte de chaos nébulaire uniforme dont les particules s'attiraient mutuellement suivant la loi de NEWTON. Cet état d'uniformité serait instable, tout centre de condensation, si petit qu'il soit, devenant immédiatement centre d'attraction.

Donc, d'après KANT, l'uniformité doit engendrer la diversité, l'homogène doit produire l'hétérogène ; — c'est là un point que nous étudierons et discuterons plus loin en détail [1] — disons seulement dès maintenant qu'EMMANUEL KANT n'est pas en contradiction, malgré les apparences, avec le second principe de la Thermodynamique, qu'on énonce parfois de cette façon un peu vague : l'état final des systèmes est l'homogénéité.

C'est un peu plus loin que KANT se met en opposition absolue avec les principes de la Mécanique :

« Admettons donc, dit-il, qu'à l'origine la matière du Soleil et des planètes ait été répandue dans tout cet espace, et qu'il se soit trouvé quelque part, là où le Soleil s'est effectivement formé, une légère prépondérance de densité et par suite d'attraction. Aussitôt une tendance générale s'est prononcée vers ce point, les matériaux y ont afflué et, peu à peu, cette masse première a grandi. Bien que des matériaux de densités différentes se trouvassent partout, cependant les plus lourds ont dû particulièrement se presser dans cette région centrale ; car, seuls, ils ont réussi à pénétrer à travers ce chaos de matériaux plus légers, et à s'approcher du centre de la gravitation générale. Or, dans les mouvements qui devaient résulter de la chute inégale de ces corps, les résistances produites entre les particules se gênant les unes les autres n'ont pu être si parfaitement les mêmes en tout sens, qu'il n'en soit résulté, çà et là, des déviations latérales. En pareil cas s'applique une loi générale des réactions mutuelles des corps, à savoir que ces corps se détournent et tâtonnent, pour ainsi dire, jusqu'à ce qu'ils aient trouvé le chemin de la moindre résistance. Ces déviations latérales aboutissent donc forcément à une circulation commune, dans le même sens et dans la même région. Et même les particules dont le

---

[1] Au Chapitre V, à l'occasion de l'hypothèse de M. DU LIGONDÈS.

Soleil a été formé lui sont parvenues affectées déjà par ce genre de déviation, en sorte que le corps résultant, le Soleil, s'est trouvé animé d'une rotation dans le même sens. » (p. 132-133.)

La pensée de KANT, à laquelle aucun mathématicien ne saurait se rallier, se comprend sans difficulté et il est aisé de voir quelle a été l'origine de l'erreur ; dans une foule la police impose parfois un sens déterminé de circulation afin d'éviter les heurts et les encombrements. KANT imagine qu'il s'établit entre les particules en mouvement une sorte de police spontanée et automatique, par l'effet des chocs eux-mêmes. Inutile d'ajouter que les affirmations de KANT sont en contradiction formelle avec le principe des aires, d'après lequel le moment de rotation d'un système soustrait à toute action extérieure est constant : ce moment de rotation doit rester toujours nul s'il l'est initialement. Il est donc impossible qu'un système partant du repos ait engendré le système solaire, pour lequel le moment de rotation n'est pas nul : or, KANT suppose explicitement que la matière primitive du Soleil part du repos. Pourquoi KANT n'a-t-il pas supposé, comme le fit plus tard LAPLACE, une rotation initiale ? C'est que LAPLACE se bornera à considérer la nébuleuse d'où est sorti le système solaire, tandis que KANT a voulu essayer d'expliquer la formation de la Voie Lactée tout entière. Peut-être aussi KANT a-t-il trouvé plus philosophique de ne pas supposer un mouvement initial.

2. Quoi qu'il en soit, KANT pense que, vers le centre de sa nébuleuse, va se former une condensation prépondérante (Soleil), autour de laquelle les particules vont circuler, à peu près dans un même plan, suivant les lois de KÉPLER ; ces particules donneront par la suite des condensations secondaires (planètes) :

« Ainsi l'équateur solaire n'est autre chose que le plan de cette circulation générale. Or, les particules qui se trouvaient hors de ce plan ont dû, en vertu des lois de la gravitation, aller le rencontrer quelque part dans leur mouvement de circulation et s'y accumuler, surtout vers la région centrale. D'ailleurs, au milieu de ces particules se poussant, se résistant l'une à l'autre, celles-là seules ont dû continuer à se mouvoir librement en cercles concentriques qui étaient arrivées à ces cercles juste avec la vitesse linéaire exigée par les lois des forces centrales. Cette vitesse résulte de la hauteur de chute ; la déviation

latérale résulte de ces conflits incessants dont le résultat final est d'arriver à la direction de moindre résistance. Quant aux particules, en bien plus grand nombre, pour qui la vitesse n'était pas dans la proportion voulue, elles ont continué leur chemin en s'approchant de plus en plus du Soleil et ont contribué à le former.

« Ainsi le système premier se trouve transformé, par les lois combinées de l'attraction et de la résistance, en un autre système dans lequel tout l'espace compris entre deux plans parallèles, assez rapprochés de part et d'autre du centre du Soleil, est parcouru librement par des particules se mouvant dans des cercles, chacune avec la vitesse qui répond à sa distance au centre. Comme leurs résistances mutuelles sont, là, aussi faibles que possible, cet état de choses durerait indéfiniment si leur attraction n'intervenait pour le modifier et y faire naître les germes de formations nouvelles, les planètes. En effet, les particules voisines décrivant des cercles presque égaux et parallèles, elles se trouvent comme en repos les unes par rapport aux autres : alors, s'il se trouve quelque centre d'attraction prépondérante, les particules voisines tendront vers ce point et y formeront une masse dont l'attraction toujours croissante finira par s'étendre et ramasser au loin de nouveaux matériaux. Évidemment les corps ainsi formés seront animés, autour du Soleil, des mêmes mouvements circulaires que leurs éléments primitifs. » (p. 134-135.)

3. Kant essaie ensuite d'expliquer la rotation directe des planètes et la formation de leurs satellites :

« Tout ce qui s'est passé en grand autour du Soleil, se répétera en petit autour de toute planète, pourvu que sa sphère d'attraction ait acquis une extension suffisante. » (p. 135.)

Pour expliquer ce sens direct de rotation des planètes et de révolution des satellites, Kant donne, il faut l'avouer, des raisons fort insuffisantes. Il semblerait même que les particules, se mouvant autour du Soleil selon la troisième loi de Képler, auraient tendance à engendrer des planètes à rotation rétrograde, puisque les particules ont une vitesse linéaire d'autant plus grande qu'elles sont plus proches du Soleil. — Nous discuterons plus loin les raisons que l'on peut invoquer pour expliquer les rotations directes.

4. Kant s'occupe aussi de la formation de l'anneau de Saturne :

« Pour montrer, par un autre exemple, que la simple action de la gravitation, en réunissant des éléments dispersés, produit nécessairement des effets d'une telle régularité, je vais dire comment l'anneau de Saturne a pu et dû se former par une voie entièrement mécanique. Que l'on veuille bien m'accorder seulement ceci : à l'origine, sous l'influence de la chaleur, l'atmosphère de Saturne s'est développée bien au delà de ses limites actuelles ; plus tard, elle s'est refroidie, et les particules atmosphériques qui s'étaient élevées ont commencé à retomber sur la planète. Cela posé, le reste suit avec une rigueur toute mécanique. Les particules de cette atmosphère, en s'élevant, ont emporté avec elles la vitesse de rotation qu'elles possédaient primitivement, selon la place qu'elles occupaient sur la planète. Elles ont donc dû, d'après les règles des forces centrales, décrire librement des cercles autour du centre. Mais il s'en est trouvé dont la vitesse était insuffisante pour que la force centrifuge fît exactement équilibre à leur pesanteur ; celles-là ont dû s'entre-choquer, se ralentir et finalement retomber sur la planète, tandis que les autres, à vitesses plus grandes, continuaient à se mouvoir librement sur leurs orbites circulaires. Celles-ci devaient nécessairement traverser à chaque révolution le plan de l'équateur de la planète, et s'y ramasser de manière à former une sorte de limbe dans le prolongement de ce plan. Ce limbe, formé ainsi de particules se mouvant librement autour de la planète, ne pouvait être qu'un anneau constitué principalement par les molécules équatoriales, puisque celles-ci possédaient, en s'élevant, la plus grande vitesse.

« Et comme il n'y a, entre toutes les distances au centre, qu'une seule distance pour laquelle cette vitesse équatoriale soit compatible avec le mouvement libre dans un cercle, on pourra décrire dans le plan de ce limbe une circonférence concentrique à Saturne, au dedans de laquelle toutes les particules devront retomber sur la planète. Les autres particules comprises entre cette circonférence et le bord extérieur du limbe, sous forme d'anneau, continueront à circuler autour de la planète sans jamais retomber sur elle.

« Cette solution nous fournit immédiatement le moyen de déterminer la durée inconnue de la rotation de Saturne. En effet, la vitesse de circulation des particules situées au bord interne de l'anneau étant

égale à celle que possède un point de l'équateur de Saturne en vertu de sa rotation, il suffira de calculer la durée de sa révolution au moyen de celle d'un des satellites, pour avoir la durée de la rotation de la planète. On trouve ainsi $6^h 25^m 52^s$. » (p. 143-144.)

Sans nous arrêter à ce chiffre beaucoup trop faible, disons que KANT fait ensuite quelques réflexions intéressantes sur la stabilité de l'anneau de Saturne. Il le considère comme formé de particules tournant indépendamment les unes des autres autour de la planète, selon la troisième loi de KÉPLER ; et il pense que, dans l'anneau se produisent « des lignes de rupture qui le divisent en anneaux concentriques isolés l'un de l'autre. » (p. 145.) Cette idée est d'autant plus remarquable que KANT ne connaissait pas la grande division de CASSINI.

Enfin, si, parmi les planètes, Saturne est la seule qui possède un anneau, c'est, d'après KANT, parce que sa densité est faible et sa rotation très rapide. Il s'ensuit que le rapport de la force centrifuge à la gravité est plus grand pour Saturne que pour les autres planètes.

5. Les comètes, selon KANT, ont une origine analogue à celle des planètes. Dans un chapitre assez confus, il s'efforce de montrer qu'elles ont dû se former à de grandes distances du Soleil, et, d'après ses idées, l'orbite d'un astre doit s'éloigner d'autant plus de la forme circulaire que l'astre s'est formé plus loin du Soleil. Le sens du mouvement des comètes devrait être, en général, le même que celui des planètes, c'est-à-dire direct ; et si, de son temps, on connaissait dix-neuf comètes rétrogrades, KANT fut porté à en attribuer au moins quelques-unes à une illusion d'optique.

6. Tels sont les traits principaux de la Cosmogonie de KANT. On voit qu'il eut l'idée d'attribuer une commune origine au Soleil et à toutes les planètes. Il fit même, à ce sujet, une curieuse remarque : si le Soleil et les planètes sont formés des mêmes éléments, la densité moyenne de celles-ci doit être égale à celle du Soleil ; or, adoptant les nombres de BUFFON, KANT trouve que le rapport de ces densités est celui de 64 à 65, coïncidence assez curieuse. Malheureusement, ses affirmations sont trop souvent en contradiction avec les principes de la Mécanique.

CHAPITRE II.

HYPOTHÈSE DE LAPLACE.

7. KANT avait étendu ses conceptions à l'ensemble du monde stellaire, à toute la Voie Lactée. LAPLACE, dans sa célèbre hypothèse, se borne à envisager la formation du système solaire. La nébuleuse de KANT était une espèce de chaos : les matériaux, s'étant agglomérés autour de certains centres de condensation, formaient comme un essaim de météores indépendants, dont les mouvements, primitivement désordonnés, se seraient plus tard ordonnés, par suite des chocs et des frottements. La nébuleuse de LAPLACE, au contraire, est une véritable atmosphère *gazeuse* animée, dès l'origine, d'un mouvement de rotation bien uniforme. Au centre de cette atmosphère LAPLACE suppose une *forte condensation*. C'est donc une sorte d'étoile nébuleuse, constituée par une masse centrale fluide, Soleil déjà à demi formé, entourée d'une atmosphère extrêmement ténue s'étendant à une très grande distance, l'ensemble tournant d'un seul bloc. En se contractant, cette atmosphère abandonnera, dans le plan de l'équateur, une série d'anneaux successifs d'où naîtront les planètes.

8. Les premières idées de LAPLACE sur la formation du système solaire sont indiquées dès la première édition (1796) de l'*Exposition du Système du Monde*. Mais c'est seulement dans des éditions postérieures que l'exposé complet de la théorie de LAPLACE devient l'objet de la Note VII et dernière. Nous suivrons ici le texte du Tome VI des Œuvres Complètes de LAPLACE (Paris, Gauthier-Villars, 1884, p. 498-509.)

« On a, dit l'Auteur, pour remonter à la cause des mouvements primitifs du système planétaire, les cinq phénomènes suivants : les mouvements des planètes dans le même sens et à peu près dans un même plan.; les mouvements des satellites dans le même sens que ceux des planètes ; les mouvements de rotation de ces différents corps

et du Soleil, dans le même sens que leurs mouvements de projection et dans des plans peu différents ; le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites ; enfin, la grande excentricité des orbes des comètes, quoique leurs inclinaisons aient été abandonnées au hasard.

« Buffon est le seul que je connaisse, qui, depuis la découverte du vrai système du monde, ait essayé de remonter à l'origine des planètes et des satellites. Il suppose qu'une comète, en tombant sur le Soleil, en a chassé un torrent de matière qui s'est réuni au loin, en divers globes plus ou moins grands et plus ou moins éloignés de cet astre : ces globes, devenus par leur refroidissement opaques et solides, sont les planètes et leurs satellites. » (p. 498.)

Laplace n'avait donc pas connaissance des travaux de Kant, puisqu'il ne cite que Buffon. Il n'a pas de peine à réfuter la théorie de ce dernier, car elle n'explique pas les cinq phénomènes qu'il a rappelés. Laplace se demande alors s'il est possible de s'élever à la véritable cause de ces phénomènes :

« Quelle que soit sa nature, puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvements des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps, et, vu la distance prodigieuse qui les sépare, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue. Pour leur avoir donné dans le même sens un mouvement presque circulaire autour du Soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre comme une atmosphère. La considération des mouvements planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du Soleil s'est primitivement étendue au delà des orbes de toutes les planètes, et qu'elle s'est resserrée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

« Dans l'état primitif où nous supposons le Soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, le transforme en étoile. Si l'on conçoit, par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière, on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement

diffuse, que l'on pourrait à peine en soupçonner l'existence. » (p. 499-500.)

L'étoile nébuleuse à forte condensation centrale n'est donc pas, pour Laplace, l'état tout à fait primordial, puisqu'il lui suppose un état antérieur. Mais il s'occupe seulement de la façon dont les planètes ont pu naître aux dépens de l'atmosphère qui entoure le noyau central de la nébuleuse. Il commence par rejeter l'hypothèse qui attribuerait aux planètes une origine extérieure à la nébuleuse, celle-ci les ayant captées ; puis il montre que l'atmosphère de la nébuleuse, en se contractant, abandonne une série d'anneaux :

« Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déterminé les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites ? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le Soleil ; on peut donc conjecturer que les planètes ont été formées à ses limites successives, par la condensation des zones de vapeurs, qu'elle a dû, en se refroidissant, abandonner dans le plan de son équateur.

« ... L'atmosphère du Soleil ne peut pas s'étendre indéfiniment ; sa limite est le point où la force centrifuge due à son mouvement de rotation balance la pesanteur ; or, à mesure que le refroidissement resserre l'atmosphère et condense à la surface de l'astre les molécules qui en sont voisines, le mouvement de rotation augmente ; car, en vertu du principe des aires, la somme des aires décrites par le rayon vecteur de chaque molécule du Soleil et de son atmosphère et projetées sur le plan de son équateur étant toujours la même, la rotation doit être plus prompte quand ces molécules se rapprochent du centre du Soleil. La force centrifuge due à ce mouvement devenant ainsi plus grande, le point où la pesanteur lui est égale est plus près de ce centre. En supposant donc, ce qu'il est naturel d'admettre, que l'atmosphère s'est étendue à une époque quelconque jusqu'à sa limite, elle a dû, en se refroidissant, abandonner les molécules situées à cette limite et aux limites successives produites par l'accroissement de la rotation du Soleil. Ces molécules abandonnées ont continué de circuler autour de cet astre, puisque leur force centrifuge était balancée par leur pesanteur. Mais, cette égalité n'ayant point lieu par rapport aux molécules atmosphériques placées sur les parallèles à l'équateur

solaire, celles-ci se sont rapprochées, par leur pesanteur, de l'atmosphère à mesure qu'elle se condensait, et elles n'ont cessé de lui appartenir, qu'autant que, par ce mouvement, elles se sont rapprochées de cet équateur. » (p. 500-501.)

Admettons donc, avec Laplace, un tel abandon, dans le plan de l'équateur, d'anneaux concentriques de vapeurs, — cette question sera soumise à l'analyse dans le Chapitre suivant, — et demandons-nous ce que deviennent ces anneaux. Chaque molécule, abandonnée à elle-même, décrira un cercle en obéissant à la troisième loi de Képler

$$\omega^2 r^3 = \text{const.},$$

ω désignant la vitesse angulaire et r le rayon de l'orbite des différentes molécules ; d'où il suit que les molécules les plus éloignées du Soleil auront une vitesse angulaire, et même une vitesse linéaire, *moindre* que les molécules les plus rapprochées.

Si donc A et B sont les cercles qui limitent extérieurement et intérieurement un anneau dont C est la ligne moyenne (*fig.* 1), la vitesse

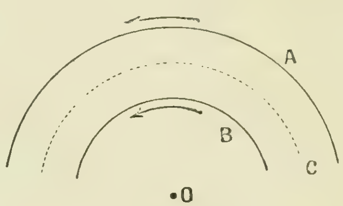


fig. 1.

des molécules situées en A sera tout d'abord inférieure à celle des molécules situées en B. Mais Laplace invoque le frottement mutuel des molécules qui tend, dit-il, à égaliser toutes les vitesses angulaires, de telle façon qu'on ait finalement

$$\omega = \text{const.} ;$$

par suite la vitesse *linéaire* des molécules telles que A deviendra supérieure à celle des molécules telles que B. Une seconde cause, d'après Laplace, a dû agir dans le même sens. Par les effets du refroidissement et de la condensation, l'anneau a dû se rétrécir, si bien que A et B se seraient rapprochés de la ligne médiane C. En vertu de la loi des aires, B s'éloignant du centre a dû diminuer sa vitesse ; A s'en

rapprochant a dû augmenter la sienne. Si LAPLACE insiste sur ce fait que, dans un même anneau, les vitesses linéaires des molécules les plus éloignées du centre ont dû finir par être plus grandes, c'est que ce sera là son principal argument pour expliquer les rotations directes des planètes. — Toutes ces questions seront discutées plus loin.

9. Voyons maintenant comment LAPLACE explique la manière dont les anneaux, instables en général par eux-mêmes, ont donné naissance aux planètes et celles-ci aux satellites.

« Si toutes les molécules d'un anneau de vapeurs continuaient de se condenser sans se désunir, elles formeraient à la longue un anneau liquide ou solide. Mais la régularité que cette formation exige dans toutes les parties de l'anneau et dans leur refroidissement a dû rendre ce phénomène extrêmement rare. Aussi le système solaire n'en offre-t-il qu'un seul exemple, celui des anneaux de Saturne. Presque toujours chaque anneau de vapeurs a dû se rompre en plusieurs masses qui, mues avec des vitesses très peu différentes, ont continué de circuler à la même distance autour du Soleil. Ces masses ont dû prendre une forme sphéroïdique, avec un mouvement de rotation dirigé dans le sens de leur révolution, puisque leurs molécules inférieures avaient moins de vitesse réelle que les supérieures; elles ont donc formé autant de planètes à l'état de vapeurs. Mais si l'une d'elles a été assez puissante pour réunir successivement par son attraction toutes les autres autour de son centre, l'anneau de vapeurs aura été ainsi transformé dans une seule masse sphéroïdique de vapeurs, circulant autour du Soleil, avec une rotation dirigée dans le sens de sa révolution. Ce dernier cas a été le plus commun : cependant le système solaire nous offre le premier cas dans les quatre petites planètes qui se meuvent entre Jupiter et Mars, à moins qu'on ne suppose, avec M. OLBERS, qu'elles formaient primitivement une seule planète qu'une forte explosion a divisée en plusieurs parties animées de vitesses différentes.

« Maintenant, si nous suivons les changements qu'un refroidissement ultérieur a dû produire dans les planètes en vapeurs dont nous venons de concevoir la formation, nous verrons naître au centre de chacune d'elles un noyau s'accroissant sans cesse par la condensation de l'atmosphère qui l'environne. Dans cet état, la planète ressemblait parfaitement au Soleil à l'état de nébuleuse où nous venons de le

considérer ; le refroidissement a donc dû produire, aux diverses limites de son atmosphère, des phénomènes semblables à ceux que nous avons décrits, c'est-à-dire des anneaux et des satellites circulant autour de son centre, dans le sens de son mouvement de rotation, et tournant dans le même sens sur eux-mêmes. La distribution régulière de la masse des anneaux de Saturne autour de son centre et dans le plan de son équateur résulte naturellement de cette hypothèse, et, sans elle devient inexplicable : ces anneaux me paraissent être des preuves toujours subsistantes de l'extension primitive de l'atmosphère de Saturne et de ses retraites successives. Ainsi les phénomènes singuliers du peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, du peu d'inclinaison de ces orbes à l'équateur solaire, et de l'identité du sens des mouvements de rotation et de révolution de tous ces corps avec celui de la rotation du Soleil, découlent de l'hypothèse que nous proposons et lui donnent une grande vraisemblance. » (p. 502-503.)

10. Pour LAPLACE, les comètes sont d'origine étrangère au système planétaire. Il les considère comme « de petites nébuleuses errantes de systèmes en systèmes solaires » (p. 504), ce qui expliquerait pourquoi les orbites des comètes sont aussi bien rétrogrades que directes et, de plus, pourquoi elles ont de fortes excentricités et inclinaisons. Mais cette manière de voir n'est plus adoptée en général, car aucune comète ne présente d'orbite franchement hyperbolique, ce qui ne manquerait sans doute pas d'arriver si ces astres étaient d'origine cosmique et nous arrivaient de l'infini avec des vitesses sensibles relativement à la vitesse de notre système solaire.

11. LAPLACE voit dans la lumière zodiacale une preuve nouvelle à l'appui de son hypothèse :

« Si, dans les zônes abandonnées par l'atmosphère du Soleil, il s'est trouvé des molécules trop volatiles pour s'unir entre elles ou aux planètes, elles doivent, en continuant de circuler autour de cet astre, offrir toutes les apparences de la lumière zodiacale. » (p. 506.)

12. L'égalité rigoureuse entre la durée de révolution sidérale de la Lune et sa durée de rotation sur elle-même, égalité qui fait que la Lune tourne toujours vers nous un même hémisphère, a été expliquée

par LAPLACE en supposant qu'à l'origine les deux mouvements angulaires de rotation et de révolution étaient peu différents :

« Alors, dit-il, l'attraction de la planète a établi entre eux une parfaite égalité ; mais en même temps elle a donné naissance à une oscillation périodique dans l'axe du satellite, dirigé vers la planète, oscillation dont l'étendue dépend de la différence primitive des deux mouvements. » (p. 507.)

La Lune, encore fluide, a donc pris une forme allongée dans le sens de la Terre ; son grand axe tendait constamment à être ramené dans cette direction par l'attraction terrestre, tel un pendule écarté de la verticale ; les oscillations de cet axe produisaient une *libration*. Mais, dans un corps fluide, la libration est accompagnée de marées internes qui font naître des frottements ; ces frottements tendent à diminuer la libration qui deviendra très petite et pourra finir par disparaître, même si elle était notable au début.

13. Une autre question tout à fait analogue, et c'est par elle que LAPLACE termine son *Exposition*, est la question relative à la particularité que présentent les trois premiers satellites de Jupiter. Appelant n, n', n'', leurs moyens mouvements et l, l', l'' leurs longitudes moyennes respectives, on a constamment, entre les trois longitudes moyennes, la relation

$$l - 3l' + 2l'' = 180^\circ,$$

et entre les trois moyens mouvements, la relation

$$n - 3n' + 2n'' = 0.$$

Or, LAPLACE a montré, dans sa *Mécanique Céleste*, que, si les conditions initiales ont été telles que ces égalités soient *approximativement* satisfaites, l'action mutuelle des satellites a suffi pour les maintenir satisfaites en moyenne, avec une inégalité périodique d'autant plus faible que ces égalités étaient plus près d'être rigoureusement vérifiées initialement. Cette inégalité périodique est tout à fait comparable à la libration dont nous venons de parler. Or, DELAMBRE n'a pu parvenir à la mettre en évidence au moyen d'observations. Comme il y a « l'infini contre un à parier » que les deux égalités écrites ci-dessus n'ont pas été *rigoureusement* vérifiées par les conditions initiales,

Laplace conclut que cette inégalité périodique a dû exister au début, mais qu'une cause l'a fait disparaître : cette cause, c'est la résistance de milieu qu'opposait l'atmosphère primitive de la planète au mouvement de ses satellites :

« Dans notre hypothèse, les satellites de Jupiter, immédiatement après leur formation, ne se sont point mus dans un vide parfait ; les molécules les moins condensables des atmosphères primitives du Soleil et de la planète formaient alors un milieu rare, dont la résistance, différente pour chacun de ces astres, a pu approcher peu à peu leurs moyens mouvements du rapport dont il s'agit, et lorsque ces mouvements ont ainsi atteint les conditions requises pour que l'attraction mutuelle des trois satellites établisse ce rapport en rigueur, la même résistance a diminué sans cesse l'inégalité que ce rapport a fait naître, et enfin l'a rendue insensible. On ne peut mieux comparer ces effets qu'au mouvement d'un pendule animé d'une grande vitesse, dans un milieu très peu résistant. Il décrira d'abord un grand nombre de circonférences ; mais, à la longue, son mouvement de circulation, toujours décroissant, se changera dans un mouvement d'oscillation, qui, diminuant lui-même de plus en plus par la résistance du milieu, finira par s'anéantir ; alors le pendule, arrivé à l'état du repos, y restera sans cesse. » (p. 508-509.)

CHAPITRE III.

ANALYSE DE L'HYPOTHÈSE DE LAPLACE. TRAVAUX DE ROCHE. ÉTUDE DE LA STABILITÉ D'UN ANNEAU. FORMATION DES SATELLITES.

I. — Surfaces de niveau.

14. Nous allons maintenant entrer dans le détail de l'hypothèse de Laplace, et, comme l'a fait Roche ([1]), soumettre cette hypothèse au calcul.

Considérons la nébuleuse de Laplace, constituée, nous l'avons dit, par un noyau central condensé, entouré d'une atmosphère très ténue, dont la masse est supposée très petite par rapport à celle de la condensation centrale. Les couches atmosphériques sont supposées participer, en vertu des frottements, à la rotation du noyau qu'elles recouvrent, de sorte que l'ensemble est animé d'une vitesse angulaire uniforme ω. Désignons par M la masse du noyau que nous supposons sphérique, et négligeons l'attraction mutuelle des molécules de l'atmosphère. Quelle sera, dans ces conditions, la forme des surfaces de niveau ?

Prenons pour axe des x l'axe de rotation de la nébuleuse, pour plan des yz le plan perpendiculaire à l'axe de rotation mené par le centre de gravité o ; et désignons par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

la distance d'un point quelconque à l'origine.

Le potentiel dû à l'attraction du noyau central est

$$\frac{M}{r} = \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

([1]) Les travaux de E. Roche sur ce sujet se trouvent résumés dans son *Essai sur la constitution et l'origine du système solaire*, 1873 (*Acad. de Montpellier*, *Section des Sciences*, t. VIII, p. 235).

le potentiel dû à la force centrifuge est

$$\frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2).$$

L'équation générale des surfaces de niveau (surfaces équipotentielles) s'écrira donc

$$\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2)=C,$$

C désignant une constante. Les surfaces de niveau sont donc, comme il était évident *a priori*, de révolution autour de ox et symétriques par rapport au plan yoz. Nous obtiendrons l'équation des méridiennes de ces surfaces en faisant $z=0$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$(1)\qquad \frac{M}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\omega^2}{2}y^2=C.$$

Lorsque la constante C est très grande, chaque méridienne (*fig.* 2)

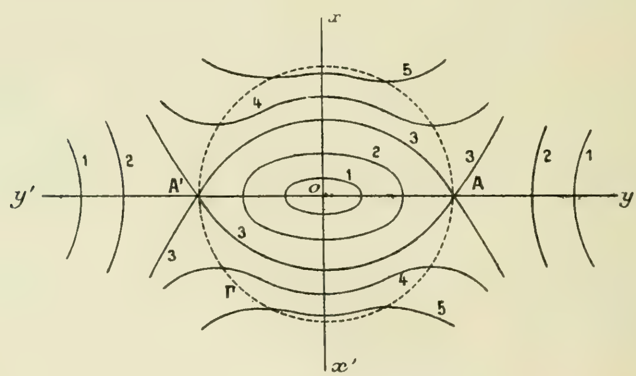


fig. 2.

se compose d'une petite courbe entourant l'origine et de deux branches infinies très éloignées, coupant l'axe des y ; l'ensemble de la méridienne est désigné par 1 dans la figure. Lorsque C diminue, la courbe entourant l'origine se dilate, les deux branches infinies se rapprochent, et donnent l'ensemble de courbes 2. Si la constante C diminue encore, on obtient la courbe 3 qui présente *deux points doubles* sur l'axe oy, puis enfin des courbes telles que 4 et 5 qui ne coupent plus l'axe des y.

15. Quels seront les points de ces courbes où la tangente sera parallèle à oy ? On obtiendra ces points en différentiant par rapport à y l'équation (1) de ces courbes, ce qui donne

$$-\frac{My}{r^3}+\omega^2 y=0.$$

Cette équation est satisfaite pour $y=0$, les points de l'axe des x sont, en effet, des sommets pour nos courbes ; elle est satisfaite également pour

$$\omega^2 r^3 = M ;$$

le lieu des points où la tangente sera parallèle à oy est donc (en dehors de l'axe des x) un cercle Γ de rayon

$$r=\sqrt[3]{\frac{M}{\omega^2}}.$$

En chaque point de ce cercle, on a

$$\frac{My}{r^3}=\omega^2 y,$$

c'est-à-dire que la force centrifuge est égale et opposée à la composante de la gravité parallèle à oy. En particulier, aux deux points doubles A et A', la force centrifuge balance exactement la pesanteur.

16. Cela posé, reprenons notre nébuleuse qui tourne tout d'une pièce. Son atmosphère, qui est supposée s'étendre aussi loin que possible, se termine nécessairement à la plus grande des surfaces de niveau dont la méridienne ne dépasse pas le cercle Γ, car, au delà de ce cercle la force centrifuge l'emporterait sur la pesanteur. La surface libre de l'atmosphère est donc engendrée par la révolution de la courbe à points doubles 3 autour de ox : cette surface présente une arête saillante tout le long de l'équateur. La surface de niveau qui vient immédiatement après n'enveloppe pas complètement les précédentes : elle s'ouvre à l'équateur, puis se développe en deux nappes infinies, comme le montre la figure 2.

Lorsque la nébuleuse se contractera par suite du refroidissement, la vitesse de rotation ω augmentera, d'après la loi des aires ; le rayon r du cercle Γ, défini par

$$r^3=\frac{M}{\omega^2},$$

diminuera : la surface libre de l'atmosphère se contractera donc, pour ainsi dire, en restant semblable à elle-même. Par suite de cette contraction, la couche fluide qui se trouve en excès descend des pôles vers l'équateur en coulant le long des surfaces de niveau, puis elle s'échappe, comme par une ouverture, par l'arête saillante que nous avons signalée. Elle cesse dès lors de faire partie de l'atmosphère de la nébuleuse : elle forme une zone équatoriale dont les particules continueront à décrire des cercles autour du centre, dans le plan de l'équateur, puisqu'au moment de l'abandon la force centrifuge faisait équilibre à la pesanteur.

Nous comprenons donc maintenant la formation des anneaux de Laplace : elle est due à la présence, sur la méridienne de la surface libre, des deux points doubles A et A', dont l'importance a été mise en évidence par Roche [1].

II. — Nécessité de l'hypothèse d'une condensation centrale.

17. Dans ce qui précède, nous avons, avec Laplace, supposé une très forte condensation centrale de notre nébuleuse. Aurions-nous pu nous dispenser de cette hypothèse ? Il est facile de voir que non.

Reprenons en effet, en abandonnant cette hypothèse, la détermination de nos surfaces de niveau. Le potentiel dû à la force centrifuge est toujours

$$\frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2).$$

Appelant $V(x, y, z)$ le potentiel dû à l'attraction, nous aurons pour le potentiel total

$$U(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2).$$

L'équation des surfaces de niveau sera

$$U(x, y, z) = C$$

et l'équation de leurs méridiennes, dans le plan des xy, sera

$$U(x, y0,) = C.$$

---

[1] E. Roche : *Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes*, 1854 (*Acad. de Montpellier, Section des Sciences*, t. II, p. 399).

Pourrons-nous avoir, pour la surface libre de l'atmosphère une arête saillante, par où la condensation laissera s'échapper des molécules pour former un anneau? Oui, s'il existe une méridienne présentant des points doubles, ce qui arrivera en général, car les trois équations

$$U(x, y, 0) = C,$$

$$\frac{dU}{dx} = 0, \qquad \frac{dU}{dy} = 0,$$

détermineront un point double situé sur l'axe des y. En effet, sur cet axe, on a

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

par raison de symétrie ; les deux autres équations déterminent les valeurs de C et de y.

Nous aurons donc bien une méridienne à point double, et de plus, comme nous l'apprend l'équation

$$\frac{dU}{dy} = 0,$$

en ce point double la force totale, résultante de la gravité et de la force centrifuge, sera nulle.

Donc il y aura, comme précédemment, abandon de molécules dans le plan de l'équateur. Ces molécules commenceront par décrire des cercles autour de la nébuleuse qu'elles viennent d'abandonner, puisqu'au moment de l'abandon la force centrifuge contrebalance la pesanteur. On pourrait croire, à première vue, que rien n'est changé et que l'anneau ainsi formé continuera à se comporter comme un anneau de Laplace. Il n'en est rien. Représentons, en effet, un anneau AA' (*fig.* 3) qui vient de se détacher de la nébuleuse. Ses molécules décrivent des cercles autour de l'axe *ox* sous l'action d'une attraction égale à la force centrifuge. Lorsque le refroidissement aura contracté la nébuleuse, la force centrifuge sera bien toujours la même, mais l'attraction, qui est celle d'un corps aplati, aura *varié*, (tandis que, dans l'hypothèse de Laplace, l'attraction du noyau sphérique ne variait pas avec la condensation). Il semble donc que les orbites des molécules ne pourront pas rester circulaires, et qu'elles deviendront excentriques. Mais nous verrons plus loin, à propos de la théorie de

Faye, qu'une planète décrivant une orbite primitivement circulaire et soumise à une attraction *lentement* variable d'après une loi quelconque, conservera une orbite circulaire.

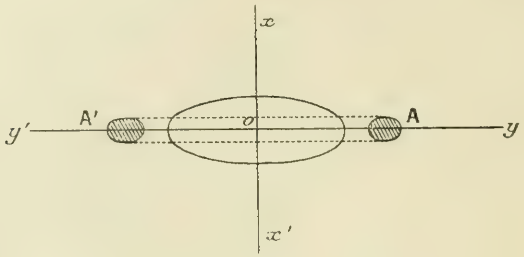


fig. 3.

18. On peut encore mettre en évidence la nécessité de supposer une grande condensation à la nébuleuse de Laplace, par les calculs suivants dus à M. Fouché [1]. Nous connaissons le moment de rotation du système solaire : il est approximativement égal au moment de rotation du Soleil autour de son axe, augmenté du moment dû à la révolution de l'ensemble des planètes autour du Soleil, (le moment dû à la rotation de chaque planète autour de son axe étant négligeable). Prenant pour unités le rayon de l'orbite terrestre, la masse du Soleil et le jour moyen, M. Fouché donne les chiffres suivants :

Pour le moment dû à la rotation du Soleil

$$2\pi \times 0{,}000\,000\,353\,8,$$

Pour le moment dû à la révolution des planètes

$$2\pi \times 0{,}000\,009\,611\,6\,;$$

on voit donc que la plus grande partie du moment de rotation est dû aux planètes, et que le moment de rotation total est égal à

$$2\pi \times 0{,}000\,009\,965\,4.$$

D'après le théorème des aires, ce moment n'a pas dû varier depuis l'origine. Supposons un instant qu'à l'époque où la nébuleuse a abandonné l'anneau qui a formé Neptune, cette nébuleuse était homogène.

---

(1) M. Fouché : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 nov. 1884 (t. 99, p. 903).

Son moment de rotation eût été alors *comparable* à celui d'une sphère homogène, de même masse que le Soleil, s'étendant jusqu'à l'orbite de Neptune et tournant avec la vitesse angulaire actuelle de cette planète. Ce moment de rotation égale

$$\frac{2\pi}{60\,181} \times \frac{2}{5} \times (30.06)^2 \quad \text{ou} \quad 2\pi \times 0.006\,04,$$

chiffre plus de six cents fois plus grand que le précédent. On voit donc quelle énorme condensation il faut accepter pour réduire le moment de rotation à la six-centième partie de ce qu'il serait dans le cas d'homogénéité.

M. Fouché présente encore la chose d'une autre manière. Imaginons, pour prendre un cas simple, la nébuleuse formée d'un noyau sphérique, entouré d'une atmosphère homogène s'étendant jusqu'à l'orbite de Neptune, le tout tournant avec la vitesse angulaire actuelle de cette planète. Le théorème des aires exige que la somme du moment de rotation du noyau et du moment de rotation de l'atmosphère soit égale à

$$2\pi \times 0.000\,009\,965\,4,$$

par conséquent le moment de rotation de l'atmosphère est inférieur à

$$2\pi \times 0.000\,009\,965\,4.$$

Or, si nous appelons m la masse de cette atmosphère, son moment de rotation est *comparable* à celui d'une sphère homogène de masse m, c'est-à-dire à

$$\frac{2\pi}{60\,181} \times m \times \frac{2}{5} \times (30.06)^2;$$

ce moment devant être inférieur au précédent, il vient

$$m < 0.001\,66,$$

chiffre à peine supérieur à la masse de toutes les planètes réunies. Il faudrait donc que l'atmosphère tout entière de la nébuleuse se fût réduite en planètes, si cette atmosphère avait été homogène.

Les calculs précédents ne sont relatifs qu'à des ordres de grandeur; mais ils suffisent pour montrer combien est capital, dans la théorie de Laplace, le fait de la condensation centrale.

19. Sans cette condensation, il aurait fallu, dans le calcul des surfaces de niveau, tenir compte de l'attraction des molécules de l'atmosphère les unes sur les autres, ce qui nous aurait donné, pour leurs méridiennes, des courbes analogues à celles de la figure 4. L'anneau

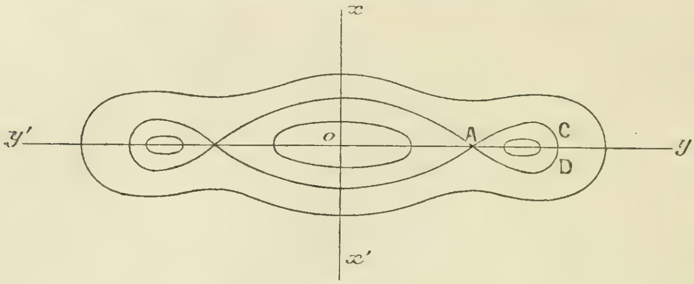


fig. 4.

abandonné aurait eu un profil tel que ACD. Nous allons trouver facilement une limite inférieure à la densité d'un tel anneau. Appliquons au volume total de l'anneau, c'est-à-dire au volume engendré par la révolution de ACD autour de ox, la formule bien connue de GREEN

$$\iint \frac{dU}{dn}\, d\omega = -\iiint \Delta U\, d\tau,$$

où $d\tau$ représente un élément du volume, $d\omega$ un élément de la surface qui limite ce volume, $\frac{d}{dn}$ la dérivée normale intérieure et U le potentiel total

$$V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$$

dont il a été question plus haut. La stabilité exige qu'à la surface ACD de l'anneau, la force totale soit dirigée vers l'intérieur, c'est-à-dire que

$$\frac{dU}{dn} > 0,$$

ce qui donne par conséquent

$$\iiint \Delta U\, d\tau < 0. \tag{2}$$

Or, si ρ est la densité de l'anneau, nous avons, d'après la formule de POISSON,

$$\Delta V = -4\pi\rho;$$

d'ailleurs

$$\Delta \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = 2\omega^2,$$

par suite

$$\Delta U = -4\pi\rho + 2\omega^2.$$

Si nous admettons, pour simplifier, que la densité ρ est uniforme dans tout l'anneau (ou plus généralement, si nous désignons par ρ la densité *moyenne* de l'anneau), l'inégalité (2) exige que

$$-4\pi\rho + 2\omega^2 < 0,$$

d'où

$$\rho > \frac{\omega^2}{2\pi};$$

nous avons ainsi une limite inférieure de la densité de l'anneau, et *a fortiori* de la nébuleuse. Lorsqu'on prend pour ω la vitesse angulaire de Neptune, on trouve pour ρ un chiffre tellement grand que, d'après ce chiffre, la masse totale de la nébuleuse serait très supérieure à celle du Soleil.

III. — Formation successive des anneaux.

20. Revenons à l'hypothèse de LAPLACE d'une très forte condensation centrale, hypothèse où nous négligeons l'action mutuelle des molécules de l'atmosphère. L'équation des surfaces de niveau est alors, nous l'avons vu dans la Section **I**,

$$\frac{M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C;$$

ces surfaces ont leurs méridiennes représentées sur la figure 2.

Si, dans cette équation, nous changeons

x, y, z	en	$\lambda x, \lambda y, \lambda z,$
ω	en	$\mu\omega,$
M	en	$\lambda^3\mu^2 M,$
C	en	$\lambda^2\mu^2 C,$

cette équation ne change pas, et la figure 2 est simplement remplacée par son homothétique, le rapport d'homothétie étant λ : c'est un cas de similitude mécanique.

Dans ces conditions,

le volume V	se trouve multiplié par λ^3,
le moment d'inertie I	se trouve multiplié par $\lambda^3\mu^2 \times \lambda^2 = \lambda^5\mu^2$,
le moment de rotation $J = \omega I$	se trouve multiplié par $\mu \times \lambda^5\mu^2 = \lambda^5\mu^3$;

les deux expressions

$$\frac{\omega^2 V}{M}, \quad \frac{J^6}{VM^9}$$

ne changent pas. C'est dire que la *forme* des surfaces de niveau ne dépend que de

$$\frac{\omega^2 V}{M},$$

si l'on adopte comme variables définissant la nébuleuse M, V et ω ; elle ne dépend que de

$$\frac{J^6}{VM^9},$$

si l'on adopte comme variables M, V et J. A la surface lenticulaire à arête saillante (engendrée par la révolution de la méridienne à points doubles), correspondront toujours pour ces expressions deux valeurs bien déterminées A et B. Toutes les fois donc que nous aurons

$$\frac{\omega^2 V}{M} > A \quad \text{ou} \quad \frac{J^6}{VM^9} > B,$$

nous dépasserons cette surface lenticulaire et la surface libre s'ouvrira à l'équateur. Nous aurons donc abandon de molécules et formation d'un anneau de Laplace.

21. Que se passera-t-il par suite du refroidissement de notre nébuleuse? La masse M du noyau et le moment de rotation J resteront constants, tandis que V diminuera ; donc

$$\frac{J^6}{VM^9}$$

augmentera et dépassera la limite B : il se formera un anneau. Si le refroidissement restait uniforme, ce processus serait *continu*, et nous aurions une plage continue de vapeurs abandonnées dans tout le plan de l'équateur, et non pas une série discrète d'anneaux séparés les uns des autres.

Pour expliquer la formation successive des anneaux, il faut donc supposer, avec Roche, que le refroidissement n'est pas uniforme. Supposons d'abord le refroidissement purement superficiel. V diminuera, mais ω ne variera pas sensiblement, le moment d'inertie n'ayant guère changé, car la densité de l'atmosphère est très faible. Quant à M il reste toujours constant. Donc

$$\frac{\omega^2 V}{M}$$

diminuant, il ne se formera pas d'anneau. Si, au contraire, le refroidissement est central, V demeurera constant, tandis que ω ira en croissant par suite de la condensation du noyau qui diminue le moment d'inertie. Donc

$$\frac{\omega^2 V}{M}$$

ira en augmentant, dépassera la limite λ, et il y aura production d'un anneau.

Mais un refroidissement central ne sera pas suivi *immédiatement* de la formation d'un anneau. En effet, par suite d'une condensation centrale, la vitesse de rotation du noyau augmentera, celle de la partie superficielle demeurant la même au moins pendant un certain temps, car il faut un certain temps pour que le frottement parvienne à communiquer à la périphérie la vitesse angulaire que possède le noyau. Or, la vitesse angulaire ω, qui importe pour la formation d'un anneau, c'est celle de la superficie. Pendant un certain intervalle de temps, ω et V restent donc constants, et il ne se forme pas d'anneau.

22. Comment expliquer ces alternances de refroidissement central et de refroidissement superficiel? Supposons que notre nébuleuse ait

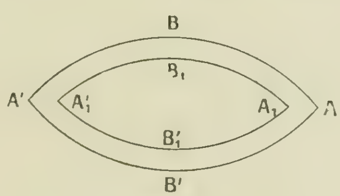


fig. 5.

atteint la forme lenticulaire ABA'B' (*fig.* 5), puis, qu'elle se contracte et arrive à la nouvelle forme lenticulaire $A_1B_1A'_1B'_1$: il se

produit alors un anneau équatorial. En même temps une portion de fluide atmosphérique en excès descend des pôles vers l'équateur, mettant ainsi brusquement à nu une nouvelle couche $A_1B_1A'_1B'_1$, qui va se refroidir rapidement. Donc l'instant de l'abandon d'un anneau est immédiatement suivi d'une période de refroidissement superficiel, pendant laquelle il ne se formera pas d'anneau. Cette période durera jusqu'à ce que, le refroidissement ayant gagné les parties centrales, le même mécanisme puisse se renouveler. Nous comprenons ainsi que les anneaux aient pu se produire d'une manière discontinue.

23. D'après la loi de Bode, la planète de rang n se trouve à une distance x_n du Soleil donnée par la formule

$$x_n = a + b^n,$$

a et b étant deux constantes. Donc, au moment de l'abandon des anneaux successifs, le rayon équatorial de la nébuleuse solaire devait être représenté par cette formule. D'autre part, en vertu de la loi exponentielle du refroidissement, ce rayon, variable avec le temps t, devait être représenté par une expression telle que

$$\alpha + \beta e^{-\lambda t},$$

α, β, λ étant trois constantes. Par suite, l'époque t de l'abandon de l'anneau de rang n est donné par l'équation

$$a + b^n = \alpha + \beta e^{-\lambda t}.$$

Or, attribuer à n une suite de valeurs entières dans le premier membre de cette équation, revient à attribuer à t, dans le second membre, des valeurs équidistantes. Donc les époques où la nébuleuse solaire a abandonné les anneaux successifs ont dû croître en progression arithmétique. Telle est, dans l'ordre d'idées qui nous occupe, la signification de la loi de Bode.

24. Revenons à notre nébuleuse qui abandonne un anneau en passant, par contraction, de la forme lenticulaire ABA'B' à la nouvelle forme lenticulaire $A_1B_1A'_1B'_1$ (*fig.* 5). Il y a lieu de remarquer que, seules, les molécules qui se trouvaient déjà au voisinage de l'équateur contribueront à former cet anneau, car les molécules de la

portion de fluide atmosphérique en excès qui, des pôles descend vers l'équateur en s'écoulant sur la surface libre, possédaient primitivement une vitesse linéaire de circulation d'autant plus petite qu'elles étaient plus voisines du pôle. Cette vitesse linéaire tendra à diminuer (en vertu de la loi des aires) quand la molécule se rapprochera de l'équateur. Les molécules qui affluent ainsi vers l'équateur ne possèdent donc pas, en y arrivant, la vitesse nécessaire pour décrire un cercle, mais une vitesse moindre. Chaque particule A partira donc tangentiellement à l'équateur et décrira, dans le plan de cet équateur, une ellipse AA' (*fig.* 6), de foyer *o*, d'autant plus excentrique que sa vitesse à l'aphélie A est plus faible. Les particules qui partent ainsi successivement de A n'ont pas toutes la même vitesse tangentielle ; mais toutes celles qui sont animées d'une même vitesse tangentielle décrivent la même ellipse et donnent une *traînée elliptique* intérieure à l'atmosphère de la nébuleuse. Il y a ainsi dans le plan de l'équateur des

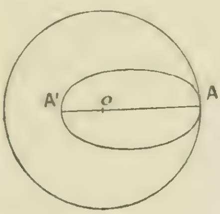


fig. 6.

traînées elliptiques, de toutes orientations et de grandeurs diverses, qui se croisent entre elles. Les chocs résultant de la coexistence de toutes ces traînées finiront bientôt par détruire les vitesses radiales et par ne laisser subsister que la vitesse angulaire de circulation. L'ensemble des particules finira par constituer un système de cercles concentriques que Roche a appelé *anneau intérieur*, parce que ses particules se meuvent à l'intérieur de l'atmosphère et décrivent des cercles dont le rayon est plus petit que celui de l'équateur.

Suivant les circonstances, un tel anneau intérieur pourra, ou bien subsister, si la résistance qu'oppose l'atmosphère au mouvement circulaire de ses particules est faible ; ou bien se détruire, si la résistance du milieu atmosphérique est assez forte pour faire tomber ses particules vers le centre. C'est principalement pour expliquer la formation de certains satellites que Roche a fait jouer un rôle aux anneaux intérieurs.

Remarquons que la formation des traînées elliptiques favorise les alternatives entre le refroidissement superficiel et le refroidissement central, des particules primitivement superficielles, et par suite froides, tombant vers le centre. Remarquons aussi qu'avec les anneaux intérieurs, ROCHE abandonne, au moins en partie, la conception primitive de LAPLACE, c'est-à-dire la conception d'une nébuleuse entièrement gazeuse. Si, en effet, un anneau intérieur était gazeux, il se mélangerait par diffusion au reste de l'atmosphère et ne pourrait jamais subsister. Il faut supposer que cet anneau est formé par des *poussières* météoriques tenues en suspension par le gaz de la nébuleuse.

IV. — Discussion de l'hypothèse d'une rotation uniforme.

25. La conception de LAPLACE repose sur le fait que la nébuleuse est animée d'une rotation uniforme, due au frottement des couches atmosphériques les unes sur les autres. C'est aussi le frottement qui, d'après LAPLACE, doit, dans les anneaux, augmenter la vitesse des molécules extérieures et diminuer celle des molécules intérieures, jusqu'à rendre uniforme la vitesse angulaire de l'anneau (*fig.* 1, p. 10).

Le frottement est-il vraiment capable de produire ces effets ? L'observation nous enseigne que, malgré les frottements, l'atmosphère du Soleil et les atmosphères des planètes ne possèdent pas une rotation uniforme. D'ailleurs, HELMHOLTZ a montré combien, pour de grands volumes fluides, l'influence des frottements est longue à se faire sentir. Ecrivons, en effet, les équations de l'hydrodynamique :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} -\left(\frac{dP}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) &= \frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}-\gamma\Delta u,\\ -\left(\frac{dP}{dy}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}\right) &= \frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}-\gamma\Delta v,\\ -\left(\frac{dP}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\right) &= \frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}-\gamma\Delta w,\\ \frac{d\rho}{dt}+\frac{d}{dx}(\rho u)+\frac{d}{dy}(\rho v)&+\frac{d}{dz}(\rho w)=0; \end{aligned}\right.$$

les trois premières sont les équations de NAVIER, la dernière est l'équation de continuité.

Dans ces équations P désigne le potentiel des forces extérieures, p

la pression, ρ la densité, γ le coefficient de viscosité, u, v, w les composantes de la vitesse.

Si, dans les équations (3), nous multiplions

$$x,\ y,\ z,\ t,\ \gamma$$

par une même constante n, et que nous ne changions pas

$$\mathrm{P},\ p,\ \rho,\ u,\ v,\ w,$$

ces équations ne changent pas.

Si donc nous considérons deux volumes fluides V_1 et V_2 homothétiques l'un de l'autre dans un rapport n, et qu'aux points homologues nous ayons les mêmes valeurs initiales de

$$\mathrm{P},\ p,\ \rho,\ u,\ v,\ w\,;$$

si, en outre, le coefficient de viscosité γ est n fois plus grand pour le second volume que pour le premier, les phénomènes produits au bout du temps t pour le premier volume se produiront pour le second au bout du temps nt. Le frottement agira donc plus lentement sur le second volume que sur le premier, bien que la viscosité du second volume soit plus forte.

Helmholtz a reconnu que, pour une atmosphère de 8 kilomètres d'épaisseur, le temps nécessaire pour réduire par le frottement de moitié une différence de vitesse est de 42747 ans, soit 4.10^4. Ici l'épaisseur de notre atmosphère est le rayon de l'orbite de Neptune, soit 4.10^9 kilomètres; le temps nécessaire pour réduire les différences de vitesse de moitié serait donc

$$4.10^4.\frac{4.10^9}{8} = 2.10^{13}$$

années, avec un coefficient de viscosité $\frac{4.10^9}{8}$ plus grand que celui de notre atmosphère; avec le même coefficient de viscosité, cela ferait

$$2.10^{13}.\frac{4.10^9}{8} = 10^{22}$$

années. Il faut donc, si l'on veut que la rotation ait pu se maintenir sensiblement uniforme, que le processus de refroidissement et de production des anneaux ait été excessivement lent.

26. Cette faiblesse de l'influence du frottement, quand il s'agit de grands volumes fluides, nous conduit à rechercher s'il ne serait pas possible d'abandonner l'hypothèse d'une rotation uniforme de la nébuleuse, et à étudier les diverses hypothèses que l'on pourrait faire sur la distribution des vitesses angulaires. Cette question présente beaucoup d'analogie avec le problème suivant : Quelle sera, dans une atmosphère (par exemple l'atmosphère terrestre), la distribution stationnaire des températures ? On pourrait dire, d'une part, que si la température initiale de l'atmosphère n'est pas uniforme, elle le deviendra bientôt par suite de la conductibilité : l'état d'équilibre des températures de l'atmosphère serait donc l'état *isotherme*. On pourrait penser, d'autre part, supposant la conductibilité négligeable, que les mouvements internes de l'atmosphère et les brassages qui s'y produisent finiront par déterminer, pour les températures, l'état d'équilibre dit *adiabatique*.

L'observation montre que dans les couches les plus basses de l'atmosphère, jusqu'à 10 kilomètres environ, on suit la loi adiabatique parce que ces couches sont brassées constamment par les grandes perturbations et les cyclones. Plus haut, on retrouve la loi isothermique ; plus haut encore, on ne sait rien. Quoique ni l'un ni l'autre

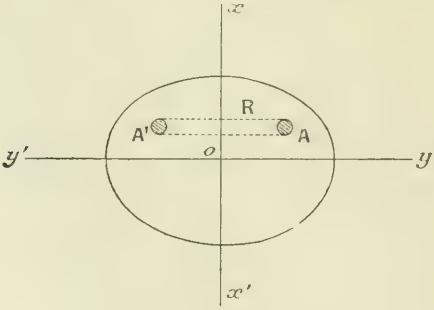


fig. 7.

des deux états ne soit effectivement réalisé par l'atmosphère, nous pouvons essayer d'étendre ces considérations à la distribution des rotations dans une masse fluide tournant autour d'un axe de révolution $x'x$ (*fig.* 7). Décomposons par la pensée la masse fluide en une infinité d'anneaux très déliés, tels que AA', tournant indépendamment autour de $x'x$. Chaque anneau possédera une vitesse angulaire ω, et

cette vitesse ω variera d'un anneau à l'autre. Si nous admettons qu'il y ait frottement des divers anneaux les uns sur les autres, il y aura tendance à l'uniformisation des vitesses angulaires, et ω deviendra bientôt le même pour toute la masse qui, finalement, tournera d'une seule pièce. Cet état final correspond à l'équilibre isotherme de l'atmosphère dont nous venons de parler, le frottement jouant ici le rôle que jouait plus haut la conductibilité thermique.

Supposons au contraire que, le frottement étant négligeable, notre masse fluide soit le siège de brassages intérieurs, (ces brassages étant supposés conserver, pour simplifier, la symétrie de révolution de notre masse autour de $x'x$). Dans ce cas le moment de rotation de chaque anneau demeurera constant ; et, si on appelle R la distance de chaque molécule à l'axe de rotation, l'état permanent de distribution des vitesses angulaires sera défini par l'équation

$$\omega R^2 = \text{const.}$$

Cet état (que nous pourrons encore appeler adiabatique) est analogue à l'équilibre adiabatique des températures : chaque anneau emportant avec lui, dans son déplacement, son moment de rotation, comme tout à l'heure chaque particule de l'atmosphère conservait la même quantité de chaleur.

Remarquons que, dans cette distribution adiabatique des rotations, on aurait $\omega = \infty$ sur l'axe de rotation. Cet état n'est donc qu'un état limite idéal, dont on pourra s'approcher plus ou moins ; il correspond au cas d'un tourbillon rectiligne dirigé suivant l'axe.

27. Etudions les conditions d'équilibre d'une telle masse fluide tournant d'un mouvement permanent autour d'un axe de révolution ox (*fig.* 7), la vitesse angulaire ω n'étant plus constante, mais variant d'un anneau AA' à l'autre. Nous reprenons les équations (3) de l'hydrodynamique dans lesquelles nous faisons $\gamma = 0$, car dorénavant nous négligerons le frottement. Les trois premières équations (3) deviennent alors les équations bien connues d'Euler. Chaque molécule tournant, par hypothèse, autour de ox avec une vitesse angulaire ω, nous devons faire

$$u = 0, \quad v = -\omega z, \quad w = \omega y,$$

et les trois premières équations (3) deviennent

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}&=0,\\ \frac{dP}{dy}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}&=\omega^2 y,\\ \frac{dP}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}&=\omega^2 z. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'isothermie, p et ρ sont reliés par la loi de MARIOTTE ; dans le cas d'adiabatie ils sont reliés par une autre formule ; mais, dans les deux cas, p est fonction de ρ et

$$\frac{dp}{\rho}=d\Pi$$

est une différentielle exacte. Multipliant les équations (4) respectivement par dx, dy, dz et ajoutant les résultats obtenus, nous trouvons

$$dP+d\Pi=\omega^2(y\,dy+z\,dz),$$

qui s'écrit

$$(5)\qquad d(P+\Pi)=\omega^2 R\,dR,$$

en appelant

$$R=\sqrt{y^2+z^2}$$

la distance d'un point à l'axe de révolution.

Le premier membre de l'équation (5) étant une différentielle exacte, il en est de même du second ; donc ω ne doit dépendre que de R et nous pouvons poser

$$\omega^2 R=\varphi'(R);$$

l'équation (5) s'écrit alors

$$d(P+\Pi)=d\varphi,$$

ce qui nous donne l'intégrale

$$P+\Pi-\varphi=\text{const.}$$

Les surfaces d'égale pression, qu'on peut encore appeler surfaces de niveau, s'obtiendront en donnant à Π une valeur constante ; elles auront donc pour équation

$$\varphi-P=C.$$

Dans l'hypothèse d'un noyau très condensé de masse M, nous pouvons écrire

$$P = -\frac{M}{r},$$

ce qui donne pour équation des surfaces d'égale pression

$$\varphi + \frac{M}{r} = C.$$

Les méridiennes de ces surfaces s'obtiendront en faisant $z = 0$ dans cette équation, ce qui donne

$$\varphi(y) + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Telle est donc l'équation des méridiennes des surfaces de niveau lorsque la vitesse angulaire ω n'est plus constante, mais varie avec la distance à l'axe de révolution suivant la loi représentée par

$$\omega^2 R = \varphi'(R).$$

28. La forme de ces méridiennes dépend essentiellement de la fonction φ. Dans le cas adopté par Laplace et par Roche, ω est constant ; alors

$$\varphi(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2}.$$

Nous retombons sur l'équation

$$\frac{\omega^2 y^2}{2} + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C$$

qui a donné les courbes représentées par la figure 2 (p. 16).

Si nous supposions que la distribution des vitesses angulaires suit la loi adiabatique, nous aurions, Ω étant une constante, les équations

$$\omega R^2 = \Omega$$

et

$$\varphi(R) = -\frac{\Omega^2}{2R^2}.$$

L'équation des méridiennes serait alors

$$-\frac{\Omega^2}{2y^2} + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

ce qui donnerait les courbes représentées par la figure 8. Les surfaces de niveau auraient donc des formes toutes différentes ne se prêtant pas à la formation d'anneaux.

Remarquons que, dans le cas de la figure 2, si l'on parcourt l'axe oy depuis o jusqu'à l'infini, la constante C commence par décroître, puis elle passe par un minimum au point double A et croît ensuite

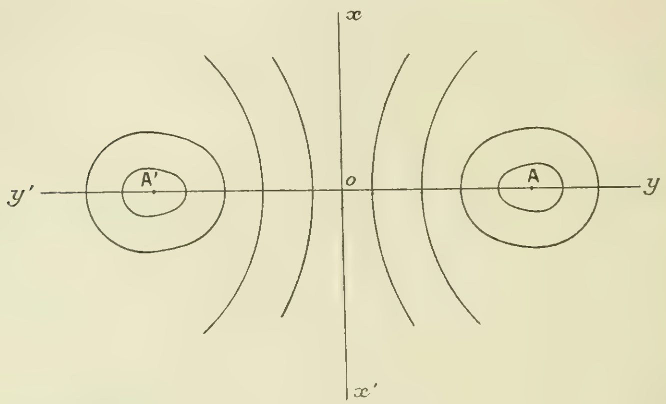


fig. 8.

indéfiniment. Au contraire, dans le cas de la figure 8, la constante C part de $-\infty$, passe par un maximum au point A, et ensuite décroît. Donc, lorsque la quantité

$$\varphi(y) + \frac{M}{y} \tag{6}$$

passera par un minimum, quand y varie de o à $+\infty$, les méridiennes présenteront un point double et il y aura formation d'anneaux de Laplace. Lorsque cette quantité passera par un maximum, les méridiennes affecteront une forme analogue à celle de la figure 8, incompatible avec la production d'anneaux.

Dans les deux cas, qu'il y ait maximum ou minimum, la dérivée première de la quantité (6) s'annulera au point correspondant :

$$\varphi'(y) - \frac{M}{y^2} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\omega^2 y - \frac{M}{y^2} = 0 ;$$

donc en ce point la force centrifuge fait équilibre à la pesanteur. Mais il n'y aura minimum, et par suite formation possible d'anneaux, que si la dérivée seconde est positive, c'est-à-dire si

$$\omega^2 + 2\omega\omega' y + \frac{2M}{y^3} > 0,$$

ce qui s'écrit, en remplaçant $\frac{M}{y^3}$ par son égal ω^2,

$$3\omega^2 + 2\omega\omega' y > 0.$$

Cette condition exprime simplement que l'expression

$$\omega^2 y^3$$

croît avec y. Cette condition n'est pas réalisée dans la distribution dite adiabatique des vitesses, puisqu'alors on a

$$\omega y^2 = \text{const.}$$

Nous voyons donc que, pour expliquer la formation des anneaux de Laplace, il est absolument nécessaire de supposer qu'on est très loin de l'adiabatie, et qu'on se rapproche d'une rotation uniforme de la nébuleuse.

V. — Étude de la stabilité d'un anneau. Anneaux de Saturne.

29. Quoi qu'il en soit des discussions précédentes, supposons qu'un anneau ait été formé et examinons les conditions de sa stabilité.

La question a été principalement étudiée pour la constitution et la stabilité des anneaux de Saturne. On peut faire sur la constitution de ces anneaux trois hypothèses : ils sont solides, ou fluides, ou formés d'astéroïdes indépendants très nombreux circulant autour de la planète. Nous allons voir qu'il faut rejeter les deux premières hypothèses pour des raisons mécaniques. La troisième hypothèse, proposée déjà par Cassini en 1715, mais sans preuves à l'appui, semble confirmée par l'expérience : l'anneau intérieur de Saturne est en effet transparent et la lumière le traverse sans trace de réfraction ; ce n'est donc pas un milieu continu. Les observations spectroscopiques montrent, de plus, que la vitesse d'une molécule de l'anneau n'est pas la même sur le bord interne que sur le bord externe.

30. *Travaux de* LAPLACE *et de* HIRN. — LAPLACE, supposant les anneaux de Saturne solides, a fait remarquer que, si ces anneaux étaient parfaitement réguliers, ils seraient nécessairement instables, car un anneau solide régulier, sous l'influence du plus faible déplacement provoqué par la cause la plus légère, tendrait à tomber sur la surface de la planète.

Supposons, en effet, que le centre de Saturne soit en o, le centre de l'anneau déplacé étant en C (*fig.* 9). Soit ab la corde perpendiculaire en o à oC. Il est clair que l'attraction de la planète sur un arc tel que mn, l'emporte sur son attraction sur un arc tel que $m'n'$.

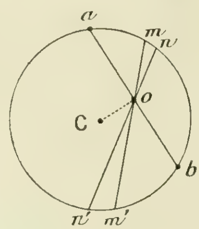


fig. 9.

Donc le segment $amnb$ de l'anneau est plus attiré par Saturne que le segment $an'm'b$. L'anneau tendra par conséquent à s'excentrer davantage et à se joindre à Saturne. Donc un anneau solide ne peut être stable que s'il est suffisamment irrégulier.

HIRN s'est demandé, d'autre part [1], dans l'hypothèse d'anneaux solides, quelle résistance on devrait attribuer à ces anneaux pour qu'ils ne soient pas brisés par l'attraction des satellites. Il est arrivé à cette conclusion : aucun corps connu, si rigide ou si tenace qu'on le suppose, ne saurait résister, sans se rompre, aux efforts qu'il aurait à supporter.

31. *Calculs de* MAXWELL. — J. CLERK MAXWELL avait aussi trouvé que les anneaux de Saturne ne pouvaient être solides, car leur stabilité exigerait alors des irrégularités si grandes qu'elles sont inadmissibles. Il examine donc l'hypothèse qui fait des anneaux de Saturne une multitude d'astéroïdes indépendants : il les assimile à des cordons de perles disposées circulairement autour de la planète et

[1] HIRN : *Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne*, 1872.

affectées de vagues régulières, soit dans le sens du rayon, soit dans le sens transversal ; chaque perle est un petit satellite. Puis il cherche les conditions pour que l'amplitude de ces vagues, nées des perturbations, ne croisse pas indéfiniment. Voici les grandes lignes de l'analyse de MAXWELL [1].

32. Prenons d'abord p satellites $P_1, P_2, \ldots P_p$, de même masse μM (M désignant la masse de Saturne), équidistants sur un même cercle

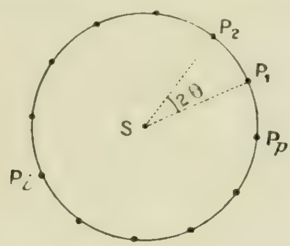


fig. 10.

de rayon a concentrique à Saturne (*fig.* 10). La distance 2θ de deux satellites voisins sur ce cercle est une constante :

$$2\theta = \frac{2\pi}{p}.$$

Un mouvement possible est celui où chaque satellite parcourrait le cercle avec une même vitesse angulaire ω déterminée par l'attraction de la planète à laquelle s'ajoute la force centrale due à l'attraction de tous les autres satellites. Appellons ce mouvement *mouvement normal*, et cherchons un mouvement plan peu différent de celui-là. Désignons par

$$r_i = a(1 + \rho_i)$$

le rayon vecteur du satellite P_i, et par

$$v_i = 2i\theta + \omega t + \sigma_i$$

[1] MAXWELL : *On the stability of the motion of Saturn's rings*. Cambridge, 1859. MAXWELL' s *Scientific Papers*, t. I, p. 288-376. Voir aussi TISSERAND : *Traité de Mécanique Céleste*, t. II, Chap. XII; et H. POINCARÉ : *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Chap. VIII (Paris, Gauthier-Villars, 1900).

son angle polaire. Dans le mouvement normal non troublé, on aurait

$$\rho_i = 0, \qquad \sigma_i = 0\,;$$

et dans un mouvement peu différent, ρ_i et σ_i seront petits ; nous négligerons leurs carrés et produits.

Écrivons, en coordonnées polaires, les équations de mouvement de l'un quelconque des satellites, par exemple du satellite P_1 :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1 \left(\dfrac{dv_1}{dt}\right)^2 = -\dfrac{M}{r_1^2} + \dfrac{dR_1}{dr_1}, \\ r_1 \dfrac{d^2 v_1}{dt^2} + 2 \dfrac{dv_1}{dt}\dfrac{dr_1}{dt} = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{dR_1}{dv_1}\,; \end{cases}$$

M désigne la masse de Saturne, et

$$R_1 = \sum_{j=2}^{j=p} \frac{\mu M}{\sqrt{r_1^2 + r_j^2 - 2 r_1 r_j \cos(v_j - v_1)}}$$

est le potentiel perturbateur dû à l'attraction de tous les autres satellites sur le satellite P_1. (Nous négligeons les attractions exercées sur Saturne par les satellites, attractions qui se compensent d'ailleurs presque exactement.)

Chaque satellite donne ainsi deux équations telles que les équations (1) : il y a donc en tout $2p$ équations entre les ρ_i et les σ_i. Ces équations devant admettre la solution

$$\rho_i = 0, \qquad \sigma_i = 0,$$

les termes indépendants des ρ_i et des σ_i dans ces équations se détruiront et disparaîtront d'eux-mêmes. Si, dans ces $2p$ équations (1) nous ne conservons que les termes du *premier ordre* par rapport aux ρ_i et aux σ_i, nous obtenons les équations

$$(2) \quad \begin{cases} 3\omega^2 \rho_i + 2\omega\sigma_i' - \rho_i'' = -\dfrac{1}{a^2}\dfrac{d(\delta R_i)}{d\rho_i}, \\ \sigma_i'' + 2\omega\rho_i' = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d(\delta R_i)}{d\sigma_i}, \end{cases}$$

où nous avons désigné par

$$\frac{1}{a}\frac{d(\delta R_i)}{d\rho_i}, \qquad \frac{1}{a}\frac{d(\delta R_i)}{d\sigma_i}$$

les parties de

$$\frac{dR_i}{dr_i}, \qquad \frac{dR_i}{dr_i}$$

qui dépendent effectivement des ρ_i et des σ_i. Les seconds membres des équations (2) sont des fonctions linéaires des ρ_i et des σ_i, puisque nous nous en tenons aux termes du premier ordre. Les équations (2) forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. On pourrait, suivant la méthode classique, les intégrer par des exponentielles de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho_i = H_i e^{Nt}, \\ \sigma_i = K_i e^{Nt}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (2), on aurait un ensemble de $2p$ équations linéaires homogènes, entre lesquelles on éliminerait les H_i et les K_i. On trouverait ainsi une équation de degré $4p$ en N. A chaque racine N correspondrait pour les équations (2) une solution de la forme (3). Pour que le mouvement normal soit stable, il est nécessaire que ρ_i et σ_i restent toujours petits. Par suite, il faudrait écrire que toutes les valeurs de N ont leur partie réelle négative ou nulle. Cette méthode serait longue, aussi MAXWELL procède-t-il indirectement. Il cherche pour les équations (2) une solution particulière de la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho_i = A \cos(\alpha + 2\gamma i\theta + nt), \\ \sigma_i = B \sin(\alpha + 2\gamma i\theta + nt), \end{cases}$$

où A, B, n et α désignent des constantes et γ un entier positif. Il se trouve que, si l'on substitue à ρ_i et à σ_i ces valeurs (4), les seconds membres des équations (2) prennent respectivement la forme

$$\omega^2\mu[AL_\gamma - BM_\gamma] \cos(\alpha + 2\gamma i\theta + nt),$$
$$\omega^2\mu[AM_\gamma + BN_\gamma] \sin(\alpha + 2\gamma i\theta + nt),$$

où L_γ, M_γ, N_γ sont trois constantes dépendant de l'entier γ. La substitution des valeurs (4) dans les équations (2) conduit donc aux deux équations

$$\begin{cases} 3\omega^2 A + 2\omega nB + n^2 A = \omega^2\mu[AL_\gamma - BM_\gamma], \\ \qquad - n^2 B - 2\omega nA = \omega^2\mu[AM_\gamma + BN_\gamma], \end{cases}$$

homogènes en A et en B et propres à déterminer n et le rapport $\frac{B}{A}$, une fois choisi l'entier γ [1]. Par l'éliminination de A et de B on obtient l'équation en n

$$(5)\quad (n^2 + 3\omega^2 - \omega^2\mu L_\gamma)(n^2 + \omega^2\mu N_\gamma) - (2\omega n + \omega^2\mu M_\gamma)^2 = 0.$$

A chaque racine n de cette équation du quatrième degré correspond pour les équations (2) une solution de la forme (4). Comme, dans ces formules (4), γ peut recevoir une série de valeurs entières [2], on conçoit la possibilité d'obtenir ainsi les intégrales générales des équations (2).

33. Remarquons que, pour une solution simple telle que la solution (4), la position et la vitesse du satellite P_i à l'époque t sont les mêmes que la position et la vitesse du satellite P_{i-1} à l'époque

$$t' = t + \frac{2\gamma\theta}{n}.$$

On peut donc dire que le mouvement se communique d'un satellite à l'autre dans le temps

$$\frac{2\gamma\theta}{n}.$$

Chaque solution simple représente ainsi une onde ou vague élémentaire propageant le mouvement avec une vitesse angulaire égale à $\frac{n}{\gamma}$. Le mouvement total est la superposition des mouvements qui correspondent à plusieurs ondes élémentaires. Les ondes les plus dangereuses pour la stabilité sont les ondes courtes, c'est-à-dire celles qui correspondent aux grandes valeurs de γ ; pour de telles ondes, en effet, deux satellites voisins pourraient se rapprocher d'une façon sensible, et leur action mutuelle ne serait plus très petite par rapport à l'action de Saturne.

34. Pour que le mouvement normal soit stable, il faut que toutes les valeurs de n soient réelles : sinon les formules (4) donneraient

(1) Ces deux équations sont les mêmes, quel que soit l'indice i du satellite que l'on considère.

(2) Si, par exemple, le nombre des satellites est pair, $p = 2q$, il suffira de donner à γ les valeurs 1, 2, ..., q. A chacune de ces valeurs correspondent 4 valeurs de n, soit en tout $4q$ valeurs de n. Or, pour chaque valeur de n, les formules (4) comportent deux arbitraires (savoir α et un facteur constant). On obtient donc ainsi $8q = 4p$ constantes arbitraires, comme l'exige l'intégrale générale des équations (2).

pour ρ_i et σ_i des exponentielles en t croissant indéfiniment. Montrons tout d'abord que, si le nombre des satellites est fini, on peut prendre la masse μM de chacun d'eux, et par suite la masse totale de l'anneau, assez petite pour assurer la réalité de toutes les valeurs de n. En effet, le premier membre de l'équation (5) en n est de la forme

$$n^2(n^2 - \omega^2) + A\mu + B\mu^2.$$

Ce premier membre sera donc négatif si, μ étant très petit, on attribue à n^2 la valeur $\frac{\omega^2}{2}$ par exemple. Si donc on substitue à n dans le premier membre de l'équation (5) les valeurs

$$-\infty \quad , \quad -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \quad , \quad 0 \quad , \quad +\frac{\omega}{\sqrt{2}} \quad , \quad +\infty \quad ,$$

on trouvera que ce premier membre prend les signes

$$+ \quad , \quad - \quad , \quad + \quad , \quad - \quad , \quad + \quad .$$

Ces quatre changements de signe prouvent que les quatre racines de l'équation (5) sont réelles. Il y a donc stabilité si μ est suffisamment petit. Bien entendu, si ω est nul il y aura instabilité, et μ pourra être d'autant plus grand que ω le sera lui-même : la stabilité croît avec la rotation, comme il arrive pour une toupie ou un gyroscope.

Si $m = \mu p$ désigne le rapport de la masse de tous les satellites à la masse de Saturne, MAXWELL a montré ainsi, qu'il faut, pour qu'il y ait stabilité, que

$$m < \frac{2,3}{p^2}.$$

On voit que si le nombre p des satellites augmente indéfiniment, leur masse totale mM (c'est-à-dire la masse de l'anneau) doit tendre vers zéro ; c'est là un inconvénient de la théorie de MAXWELL ; mais c'est un inconvénient artificiel, car l'hypothèse d'un grand nombre de petits satellites répartis sur une seule circonférence est trop simple. Il faudrait supposer une distribution des satellites occupant un certain volume de l'espace ; alors la difficulté signalée disparaîtrait.

35. *Limite supérieure de la densité d'un anneau fluide.* — MAXWELL étend son analyse au cas d'un anneau supposé fluide. Malheureusement, dans cette partie de son Mémoire, les raisonnements manquent parfois de rigueur et même de clarté, aussi faut-il les considérer seu-

lement comme un aperçu, dont la conclusion semble néanmoins devoir être acceptée.

Décomposons l'anneau supposé fluide en un grand nombre de tranches MNM'N' par des plans méridiens (*fig.* 11) et assimilons chaque

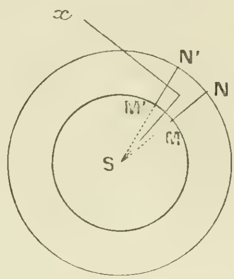


fig. 11.

tranche à un des satellites précédents P_i. Il s'agit de calculer les seconds membres des équations (2), c'est-à-dire (en effaçant l'indice i)

$$\frac{d(\delta R)}{d\rho}, \quad \frac{d(\delta R)}{d\sigma}.$$

On peut concevoir que la quantité

$$\frac{d(\delta R)}{d\rho}$$

puisse être faite égale à zéro, car elle représente (à un facteur près) le travail élémentaire dû, dans un déplacement radial de la tranche, aux inégalités de l'anneau ; or, ce travail est très petit.

Calculons à présent la quantité

$$\frac{d(\delta R)}{d\sigma},$$

qui représente (à un facteur près) le travail élémentaire dû aux inégalités de l'anneau, dans un déplacement tangentiel de la tranche.

Appelons D la densité du fluide dans le mouvement normal et $D + \delta D$ sa densité dans le mouvement troublé. Le théorème de Poisson donne

$$\Delta(R + \delta R) = -4\pi(D + \delta D),$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \Delta(\delta R) = -4\pi(\delta D).$$

puisque dans le mouvement normal on a

$$\Delta R = -4\pi D.$$

Si nous adoptons, pour un instant, un axe des x tangent à la circonférence moyenne de l'anneau, nous reconnaissons que la dérivée

$$\frac{d^2(\delta R)}{dx^2}$$

est bien plus grande que les deux autres, car c'est dans le sens des x que l'onde de condensation se propage, et nous choisissons les ondes les plus défavorables à la stabilité, c'est-à-dire les plus courtes; l'onde étant très courte les variations dans le sens de la propagation, c'est-à-dire dans le sens de l'axe des x sont très rapides; nous pouvons donc écrire, au lieu de l'équation (5),

$$(6) \qquad \frac{d^2(\delta R)}{dx^2} = -4\pi(\delta D).$$

La contraction a eu pour effet de multiplier la densité de la tranche par

$$\left(1 + \frac{\delta D}{D}\right);$$

elle a multiplié son épaisseur par

$$\left(1 + a\frac{d\sigma}{dx}\right);$$

comme sa masse totale n'a pas changé, on doit avoir

$$\left(1 + \frac{\delta D}{D}\right)\left(1 + a\frac{d\sigma}{dx}\right) = 1,$$

c'est-à-dire

$$a\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{\delta D}{D}.$$

Alors l'équation (6) donne la suivante :

$$\frac{d^2(\delta R)}{dx^2} = 4\pi a D\frac{d\sigma}{dx};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{d(\delta R)}{dx} \text{ ou } \frac{1}{a}\frac{d(\delta R)}{d\sigma} = 4\pi a D\sigma.$$

Le second membre de la seconde équation (2) est donc

$$4\pi D\sigma;$$

nous avons vu d'ailleurs que le second membre de la première équation (2) peut être pris égal à zéro.

Si maintenant dans les équations (2) nous substituons les valeurs (4) de ρ et de σ, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} 3\omega^2 A + 2\omega n B + n^2 A &= 0, \\ - n^2 B - 2\omega n A &= 4\pi D B; \end{aligned}\right.$$

et l'élimination de A et de B entre ces équations conduit à l'équation en n

$$(n^2 + 3\omega^2)(n^2 + 4\pi D) - 4\omega^2 n^2 = 0$$

ou

$$n^4 - (\omega^2 - 4\pi D)n^2 + 12\pi\omega^2 D = 0.$$

Cette équation bicarrée en n doit, s'il y a stabilité, avoir ses racines réelles, ce qui exige que

$$(\omega^2 - 4\pi D)^2 - 48\pi\omega^2 D > 0;$$

cette inégalité peut s'écrire ainsi :

$$\omega^4 - 56\pi D\omega^2 + 16\pi^2 D^2 > 0.$$

Nous savons déjà que la masse de l'anneau et, par suite, sa densité doivent être petites pour qu'il y ait stabilité. Négligeant donc D^2, nous obtenons la condition

$$\omega^2 > 56\pi D,$$

d'où nous tirons l'inégalité

(7) $$4\pi D < \frac{\omega^2}{14}$$

qui fixe une limite *supérieure* à la densité de l'anneau. MAXWELL conclut que si l'anneau était liquide sa densité ne pourrait pas surpasser $\frac{1}{300}$ de celle de la planète. Ce résultat est vrai pour un anneau de poussières cosmiques comme pour un anneau liquide : la stabilité ne peut exister que si la densité est suffisamment petite.

36. *Limite inférieure de la densité d'un anneau fluide.* — Un calcul que nous avons déjà fait à la fin de la Section **II** (p. 23), donne une limite *inférieure* pour la densité d'un anneau fluide homogène supposé tourner d'une seule pièce avec la vitesse angulaire ω : l'anneau n'est stable que si sa densité ρ satisfait à l'inégalité

$$(8) \qquad \rho > \frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Le même raisonnement nous permet même de dire que, pour une masse fluide homogène tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire constante ω et soumise à l'attraction mutuelle de ses molécules, *aucune figure n'est stable si l'inégalité* (8) *n'est pas satisfaite* [1]. Si, dans cette inégalité, nous prenons pour ω la vitesse angulaire d'un satellite dont l'orbite coïnciderait avec l'anneau de Saturne, nous trouvons que la densité ρ de l'anneau doit être supérieure à $\frac{1}{16}$ de celle de la planète. Cette condition est incompatible avec celle de Maxwell et elle nous force à rejeter l'hypothèse de la fluidité des anneaux de Saturne. Comme ces anneaux ne sont pas non plus solides, d'après Maxwell et d'après Hirn, nous sommes amené à les regarder comme formés d'un grand nombre de corpuscules indépendants : le calcul de Maxwell nous a appris qu'une telle constitution peut être stable si la masse totale de l'anneau est assez petite.

37. La limite inférieure de la densité, donnée par l'inégalité (8), a été trouvée en supposant que la vitesse angulaire ω est la même pour tout le fluide. Affranchissons-nous de cette hypothèse et considérons, comme dans la Section **IV**, une masse fluide tournant d'un mouvement permanent autour d'un axe de révolution $x'x$ (*fig.* 7, p. 30), la vitesse angulaire ω variant d'un anneau élémentaire AA' à l'autre. Conservant les notations de la Section **IV**, nous avons (p. 32) la relation

$$\varphi - \Pi - P = \text{const.}$$

Or, la pression p est nulle à la surface et positive à l'intérieur du fluide ; donc

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho}$$

[1] H. Poincaré : *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, 1885 (*Bulletin astronomique*, t. II, p. 117).

présente un maximum à l'intérieur ; par conséquent il en est de même de l'expression

$$\varphi - P.$$

Il y a donc certainement, à l'intérieur de la masse fluide, un point (ou plusieurs) où l'on a

$$(9) \qquad \Delta(\varphi - P) < 0.$$

Or, rappelons-nous que φ ne dépend que de la distance

$$R = \sqrt{y^2 + z^2}$$

à l'axe de rotation ; on a

$$\Delta\varphi = \varphi'' + \frac{\varphi'}{R} ;$$

et comme on a (p. 32)

$$\varphi' = \omega^2 R,$$

il vient

$$\Delta\varphi = 2\omega\omega' R + 2\omega^2 ;$$

d'ailleurs, le théorème de Poisson donne

$$\Delta(-P) = -4\pi\rho.$$

L'inégalité (9) montre donc qu'il existe à l'intérieur de la masse fluide des points satisfaisant à la condition

$$(10) \qquad 2\omega^2 + 2\omega\omega' R - 4\pi\rho < 0.$$

Si nous supposions que ω ne varie pas avec R, nous retrouverions la limite inférieure de la densité donnée par l'inégalité (8).

38. Nous pouvons même serrer davantage l'inégalité (10). Considérons un anneau fluide dont la méridienne est QQ' et qui tourne

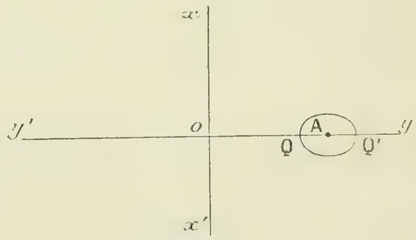


fig. 12.

autour de son axe ox (*fig.* 12). Nous venons de dire qu'il existe à l'intérieur du fluide des points A où φ — P est maximum ; le lieu de

ces points est ici un cercle d'axe $x'x$ et de rayon oA. Or, en un point où $\varphi - P$ est maximum, on a, non seulement

$$\Delta(\varphi - P) < 0,$$

mais encore

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2(\varphi - P)}{dx^2} < 0,\\ &\frac{d^2(\varphi - P)}{dy^2} < 0,\\ &\frac{d^2(\varphi - P)}{dz^2} < 0.\end{aligned}\right.$$

Pour l'anneau de Saturne nous pouvons poser

$$-P = \frac{M}{r} + \delta P,$$

$\frac{M}{r}$ étant le potentiel dû à l'attraction de Saturne et δP étant le potentiel dû à l'attraction de l'anneau sur lui-même. Calculons séparément les trois dérivées secondes en x, y, z de

$$\varphi, \quad \frac{M}{r}, \quad \delta P,$$

au point A de l'axe des y (*fig.* 12) où $\varphi - P$ passe par un maximum. Nous trouvons qu'on a, en ce point A,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \omega^2 + 2\omega\omega' y, \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \omega^2;$$

$$\frac{d^2\frac{M}{r}}{dx^2} = -\frac{M}{y^3}, \qquad \frac{d^2\frac{M}{r}}{dy^2} = \frac{2M}{y^3}, \qquad \frac{d^2\frac{M}{r}}{dz^2} = -\frac{M}{y^3};$$

$$\frac{d^2(\delta P)}{dx^2} = -\varepsilon, \qquad \frac{d^2(\delta P)}{dy^2} = \varepsilon + \varepsilon' - 4\pi\rho, \qquad \frac{d^2(\delta P)}{dz^2} = -\varepsilon';$$

ε et ε' sont de petites quantités positives ; d'ailleurs, au point A considéré, $\frac{M}{y^3}$ diffère peu de ω^2 (troisième loi de Képler), et l'on peut écrire approximativement

$$\frac{d^2\frac{M}{r}}{dx^2} = -\omega^2, \qquad \frac{d^2\frac{M}{r}}{dy^2} = 2\omega^2, \qquad \frac{d^2\frac{M}{r}}{dz^2} = -\omega^2.$$

Il est aisé de se rendre compte de l'erreur commise en écrivant ces équations ; on a remplacé $\frac{M}{y^3}$ par ω^2 ; l'équation exacte s'obtient en écrivant

$$\frac{d(\varphi - P)}{dy} = 0$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d}{dy}\frac{M}{r} + \frac{d\delta P}{dy} = 0$$

ou

$$\omega^2 y - \frac{M}{y^2} + \frac{d\delta P}{dy} = 0.$$

L'erreur commise est donc de l'ordre de $\frac{d\delta P}{y dy}$; si les dimensions de la section méridienne de l'anneau sont très petites par rapport au rayon de l'anneau (c'est-à-dire par rapport à y ou à R) $\frac{d\delta P}{y dy}$ sera de l'ordre de $\frac{\rho\alpha}{y}$; α étant l'une des dimensions de la section méridienne, il sera donc négligeable non seulement d'une manière absolue, mais devant ρ, c'est-à-dire devant ε et ε' qui sont du même ordre que ρ.

Alors les trois inégalités (11) donnent les trois suivantes

$$-\omega^2 - \varepsilon < 0,$$
$$3\omega^2 + 2\omega\omega' y + \varepsilon + \varepsilon' - 4\pi\rho < 0,$$
$$-\varepsilon' < 0.$$

La première et la troisième sont satisfaites d'elles-mêmes. De la seconde on tire, en remplaçant y par R, et se rappelant que ε et ε' sont positifs, l'inégalité

(12) $$3\omega^2 + 2\omega\omega' R < 4\pi\rho,$$

donnant pour la densité ρ une limite inférieure plus précise que la limite donnée par l'inégalité (10).

Si donc la distribution des vitesses angulaires dans l'anneau est telle que le premier membre de l'inégalité (12) soit positif, il existera une limite inférieure de la densité ; si, au contraire, ce premier membre est négatif il n'en existera pas : or, ce premier membre est positif ou négatif suivant que $\omega^2 R^3$ croît ou décroît quand R augmente.

VI. — Rupture des anneaux de Laplace. Formation des planètes.

39. Revenons maintenant aux anneaux abandonnés par la nébuleuse de Laplace dans le plan de son équateur, et montrons qu'il arrivera un moment où ils seront nécessairement instables. Nous venons de trouver, dans la Section précédente, une limite *supérieure* et une limite *inférieure* pour la densité ρ d'un anneau fluide. Pour qu'il y ait stabilité on doit avoir à la fois, d'après les inégalités (7) et (12),

$$(13)\qquad \begin{cases} 4\pi\rho < \dfrac{\omega^2}{14}, \\ 4\pi\rho > 3\omega^2 + 2\omega\omega' R. \end{cases}$$

A l'instant où l'anneau est abandonné, sa densité est très petite, donc la première inégalité est vérifiée. De plus, les particules de l'anneau se mouvant selon la troisième loi de Képler, on a

$$\omega^2 R^3 = \text{const.}$$

et par suite, en différentiant et en divisant par R^2,

$$3\omega^2 + 2\omega\omega' R = 0\,;$$

la seconde inégalité est donc vérifiée aussi.

Donc l'anneau est stable au début. Mais cet état de choses ne peut pas durer. D'abord, par suite du refroidissement, la densité ρ augmentera et la première inégalité pourra cesser d'être satisfaite. Ensuite, le frottement des couches les unes sur les autres tendra, d'après Laplace, à uniformiser la vitesse angulaire ω qui deviendra constante : la dérivée ω' devenant nulle, les deux inégalités (13) deviennent incompatibles, et l'anneau ne peut pas subsister.

40. D'ailleurs, une cause autre que le frottement agit pour rendre ω uniforme et ω' nul. Cette cause est celle qu'indique Laplace et que nous avons déjà signalée (Chap. I, p. 10, *fig.* 1). A l'instant t_0 où l'anneau est abandonné, la troisième loi de Képler donne, entre la vitesse angulaire ω_0 d'une particule et sa distance R_0 au centre, la relation

$$(14)\qquad \omega_0^2 R_0^3 = M.$$

A une époque ultérieure t, l'anneau s'est rétréci et a diminué d'épaisseur par suite du refroidissement; le moment de rotation de chaque particule étant demeuré constant, la nouvelle vitesse angulaire ω et la nouvelle distance au centre R vérifient l'équation

$$(15) \qquad \omega R^2 = \omega_0 R_0^2.$$

Comparant l'équation (14) à l'équation (15) il vient

$$(16) \qquad \omega = \frac{1}{R^2}\sqrt{MR_0}.$$

L'anneau étant très mince, nous prenons pour unité son rayon moyen et nous posons

$$R = 1 + \varepsilon,$$
$$R_0 = 1 + \varepsilon_0,$$

ε et ε_0 étant de petites quantités. La contraction λ étant mesurée par le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, on a

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0};$$

la vitesse angulaire ω à l'époque t est donnée par l'égalité (16) qui s'écrit

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{M}(1+\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)^{-2} \\ &= \sqrt{M}\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2} - 2\varepsilon\right) \\ &= \sqrt{M}\left[1 + \varepsilon_0\left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right)\right]. \end{aligned}$$

Quand la contraction aura atteint la valeur $\lambda = \frac{1}{4}$, ω aura atteint, on le voit, une valeur constante $\sqrt{M}$.

Ce mécanisme concourt donc avec le frottement à uniformiser la vitesse de rotation de l'anneau et à la rendre constante, les particules les plus externes acquérant ainsi une vitesse linéaire plus grande que les plus internes, comme le voulait Laplace pour expliquer la rotation directe des planètes. Malheureusement l'anneau deviendra instable avant que cet état de rotation uniforme ne soit atteint, puisque les deux inégalités (13) seront devenues incompatibles.

41. L'anneau, n'étant plus stable, se rompra en plusieurs parties, qui ne seront encore que des masses gazeuses plus ou moins diffuses, décrivant chacune un cercle autour du Soleil, à la façon d'un satellite. Si toutes ces masses gazeuses étaient juste à la même distance du Soleil elles n'arriveraient pas à se rencontrer. Mais, si leurs distances au Soleil sont un peu différentes, leurs vitesses angulaires le seront aussi, et par suite l'une des masses rejoindra l'autre : si la différence de leurs distances au Soleil est plus petite que la somme des rayons des deux masses, celles-ci se choqueront et se réuniront en une seule. Nous comprenons ainsi comment les diverses masses en lesquelles s'est brisé l'anneau peuvent arriver à se réunir en une seule et à donner une planète unique.

42. *Cause de la rotation directe.* — Il s'agit maintenant d'expliquer pourquoi cette planète aura en général un mouvement de rotation direct, puisque l'explication de Laplace est insuffisante. Considérons deux masses gazeuses M et M' provenant de la rupture de l'anneau et dont les distances au Soleil sont un peu différentes (*fig.* 13).

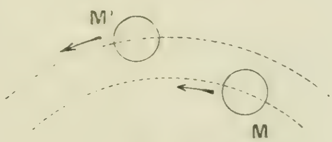


fig. 13.

D'après la troisième loi de Képler, la masse la plus éloignée M' a une vitesse moindre que la plus rapprochée M : c'est donc M qui rejoindra M', viendra la choquer et se coller à elle. Il semble, à première vue, que la planète résultant de ce choc aura un mouvement de rotation rétrograde, puisque ses parties internes auront des vitesses plus grandes que ses parties externes. Mais la masse gazeuse globuleuse, grossièrement ronde, résultant de la réunion de M et de M', n'est pas soustraite à toute action extérieure. Elle subit l'attraction du Soleil ; cette attraction lui fera prendre une forme allongée vers cet astre, l'attraction solaire tendant toujours à ramener son grand axe dans cette direction. Il se produira donc dans la masse des marées internes considérables accompagnées de frottements, qui tendront à rendre égales la durée de rotation et la durée de révolution.

Ce mécanisme ne diffère pas de celui qu'invoquait Laplace pour expliquer le fait que la Lune présente toujours à la Terre le même hémisphère (Chap. II, p. 13.)

La masse planétaire arrivera donc à présenter une durée de rotation égale à sa durée de révolution, et à ce moment sa rotation sera devenue *directe*. La condensation augmentant par suite du refroidissement, cette vitesse de rotation directe tend à augmenter; mais les marées tendent à la maintenir égale à celle de révolution. Au début, l'influence des marées l'emportera et les deux vitesses seront égales; puis, l'influence des marées diminuant, la masse planétaire commencera à présenter une libration; enfin, la condensation se poursuivant, l'influence des marées cessera d'être prépondérante et il y aura une rotation directe plus rapide que la révolution (voir au Chap. VII ce que nous disons à propos de la théorie de Darwin). L'action des marées diminue, en effet, à mesure que la contraction se poursuit, car la marée sur un astre dépend de la *différence* entre l'attraction solaire à la surface de cet astre et l'attraction solaire en son centre; cette différence est évidemment plus faible pour un petit astre que pour un gros.

Cette expliquation de la rotation directe de la plupart des planètes, fondée sur l'action des marées est, semble-t-il, la meilleure. Si les planètes les plus extérieures (Uranus et Neptune) ont une rotation rétrograde, c'est, sans doute, que leur très grand éloignement a rendu la marée solaire très faible et insuffisante à produire la rotation directe.

VII. — Formation des satellites.

43. Nous venons de nous rendre compte comment un anneau de Laplace, en se rompant, a pu se transformer en une masse sphéroïdale généralement animée d'un mouvement de rotation direct. Cette masse sphéroïdale, que nous appellerons *nébuleuse planétaire*, pourra à son tour engendrer une planète accompagnée de satellites. Cette nébuleuse planétaire, en effet, est comparable à la nébuleuse solaire, mais sous de moindres proportions. Elle pourra, par l'effet de la condensation, abandonner le long de son équateur des anneaux nébuleux qui finiront par engendrer des satellites.

Toutefois, tandis que la nébuleuse solaire, libre de toute action extérieure, présentait une figure de révolution autour de son axe de rotation, la nébuleuse planétaire est soumise à l'influence de l'attraction solaire qui y produit des marées : sous cette influence la nébuleuse planétaire s'allonge dans le sens du Soleil et tend à tourner constamment vers cet astre les mêmes points de sa surface. Ainsi s'établit, comme nous l'avons dit, l'égalité entre les durées de rotation et de révolution de la nébuleuse planétaire. Cette égalité qui, pour une raison analogue, a lieu encore aujourd'hui pour la Lune et probablement pour plusieurs satellites, ainsi peut-être que pour les planètes Mercure et Vénus, a dû se rencontrer chez toutes les planètes dans la première phase de leur existence.

Tant que s'est maintenue cette égalité, la nébuleuse planétaire a dû rester dans des conditions impropres à la formation de satellites. En effet, son volume V diminuait par suite de la contraction, mais la vitesse ω restait la même ; donc $\frac{\omega^2 V}{M}$ diminuait, condition incompatible avec la production d'anneaux, ainsi que nous l'avons vu dans la Section **III**. Si l'égalité entre les durées de rotation et de révolution a lieu encore actuellement pour tous les satellites, nous nous expliquons pourquoi il n'y a pas de satellites du second ordre.

44. Etudions de plus près et analytiquement les conditions où s'est trouvée la nébuleuse planétaire dans cette première phase où elle tournait sur elle-même dans un temps égal à celui de sa révolution. D'abord, on peut faire au sujet de sa constitution deux hypothèses très différentes : on peut la supposer à peu près homogène, ou bien avec une très forte condensation centrale. Pour la nébuleuse solaire, la seconde hypothèse s'imposait à l'exclusion de la première (Section **II**). Mais pour une nébuleuse planétaire elle ne s'impose pas autant, et il y a lieu d'examiner successivement les deux hypothèses.

45. *Cas d'une masse homogène.* — Etudions donc en premier lieu les conditions d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme ω autour d'un axe de direction fixe Ox passant par son centre de gravité o ; cette masse est soumise à l'attraction mutuelle de ses parties, et aussi à l'attraction d'un astre éloigné C (Soleil) situé dans le plan de l'équateur. Nous supposerons que, en vertu de cette dernière force, le point o décrit un cercle ayant

son centre en C, et que la durée de révolution est égale à la durée de la rotation de la masse fluide autour de ox (¹). Ce sont bien là des conditions analogues à celles où se trouvait la nébuleuse planétaire que nous étudions.

Prenons pour axes rectangulaires mobiles (*fig.* 14) l'axe de rotation ox, l'axe oy dirigé vers le Soleil C et l'axe oz, perpendiculaire aux

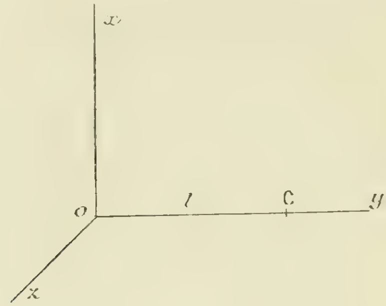


fig. 14.

deux précédents. Dans ces conditions, la théorie élémentaire des marées nous apprend que le potentiel perturbateur dû à l'attraction solaire est

$$V_3 = \frac{M'}{2l^3}(2y^2 - x^2 - z^2),$$

M' désignant la masse du Soleil et l sa distance au point o. Si M est la masse du fluide en mouvement, la troisième loi de Képler donne l'équation

$$\omega^2 l^3 = M + M';$$

d'où nous tirons, en appelant

$$\mu = \frac{M}{M'}$$

le rapport de la masse fluide à la masse solaire,

$$\frac{M'}{l^3} = \frac{\omega^2}{1 + \mu};$$

(¹) E. Roche : *Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné*, 1849, 1850, 1851 (*Acad. de Montpellier, Section des Sciences*, t. I, p. 243 et 333, t. II, p. 21). Voir aussi Tisserand : *Traité de Mécanique Céleste*, t. II, Ch. VIII, p. 110.

par suite nous pouvons écrire

$$V_3 = \frac{\omega^2}{2(1+\mu)}(2y^2 - x^2 - z^2).$$

Le potentiel dû à la force centrifuge est

$$V_2 = \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2).$$

Nous voulons prouver que la masse fluide homogène peut prendre, dans l'équilibre, la figure d'un ellipsoïde

$$(17) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dont les axes sont dirigés suivant ox, oy, oz. On sait que le potentiel d'attraction à l'intérieur d'un tel ellipsoïde homogène peut s'écrire

$$V_1 = -\frac{1}{2}(Px^2 + Qy^2 + Rz^2),$$

P, Q, R étant trois constantes. Si l'on désigne par

$$(18) \qquad s = \frac{a^2}{b^2}, \qquad t = \frac{a^2}{c^2},$$

les carrés des rapports d'un des axes de l'ellipsoïde aux deux autres, ces trois constantes ont pour valeurs

$$(19) \qquad \begin{cases} P = 2\pi\rho \displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)\Delta}, \\ Q = 2\pi\rho s \displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{(1+su)\Delta}, \\ R = 2\pi\rho t \displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{(1+tu)\Delta}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\Delta = \sqrt{(1+u)(1+su)(1+tu)}.$$

Donc, lorsque la masse homogène affecte la forme de l'ellipsoïde (17), le potentiel total a pour valeur

$$V_1 + V_2 + V_3.$$

Pour montrer que l'ellipsoïde (17) est une figure d'équilibre, il suffit de faire voir qu'on peut l'identifier avec une surface équipotentielle

$$V_1 + V_2 + V_3 = \text{const.};$$

cette dernière équation s'écrit

$$-(Px^2 + Qy^2 + Rz^2) + \omega^2(y^2 + z^2) + \frac{\omega^2}{1+\mu}(2y^2 - x^2 - z^2) = \text{const.},$$

et l'identification avec l'équation (17) donne

$$a^2\left(P + \frac{\omega^2}{1+\mu}\right) = b^2\left(Q - \omega^2 - \frac{2\omega^2}{1+\mu}\right) = c^2\left(R - \omega^2 + \frac{\omega^2}{1+\mu}\right).$$

Avec la notation (18), ces deux dernières équations s'écrivent, on le voit de suite,

$$Q - Ps = \frac{\omega^2(s + 3 + \mu)}{1+\mu},$$

$$R - Pt = \frac{\omega^2(t+\mu)}{1+\mu}.$$

Ce sont deux équations aux deux inconnues s et t : elles détermineront les rapports des axes de l'ellipsoïde qui est une figure d'équilibre. Si nous posons

$$V = \frac{\omega^2}{2\pi\rho},$$

ces deux équations s'écrivent, en remplaçant P, Q, R, par leurs valeurs (19),

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{V}{1+\mu} = \dfrac{s(1-s)}{s+3+\mu}\displaystyle\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)(1+su)\Delta} \\ \qquad = \dfrac{t(1-t)}{t+\mu}\displaystyle\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)(1+tu)\Delta}. \end{cases}$$

Puisque V est essentiellement positif, s et t seront toujours plus petits que 1, c'est-à-dire que l'axe de rotation sera toujours le petit axe de l'ellipsoïde.

46. La seconde des équations (20) peut être considérée comme représentant une courbe dans le plan des st. Si nous construisons la portion de cette courbe intérieure au carré

$$0 < s < 1,$$
$$0 < t < 1,$$

nous trouvons qu'elle a la forme représentée sur la figure 15 : elle se compose de deux branches AB et OD. Pour la branche AB, nous avons $t > s$: l'ellipsoïde a son grand axe dirigé vers le Soleil, ce qui

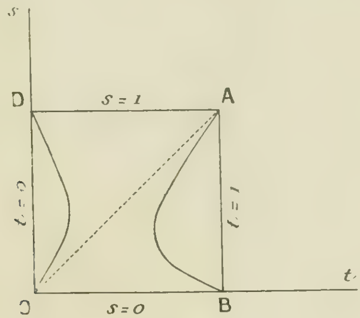


fig. 15.

correspond a des formes stables. Au point A l'ellipsoïde se confond avec une sphère, au point B c'est une aiguille infiniment allongée, à section circulaire. La branche OD pour laquelle $t < s$, correspond à des ellipsoïdes allongés dans une direction perpendiculaire à celle du Soleil ; ces ellipsoïdes sont des figures toutes instables. Au point D l'ellipsoïde est une aiguille très allongée à section circulaire, au point O c'est une aiguille très allongée et à section aplatie.

Si l'on examine comment varie

$$V = \frac{\omega^2}{2\pi\rho}$$

lorsqu'on chemine sur ces deux branches de courbe, on reconnaît que V partant de o au point A, commence à croître, passe par un maximum, puis reprend en B la valeur o. De même V part de o au point D, passe par un maximum et s'annule de nouveau au point O.

Si l'on considère le moment de rotation, on constate que, nul en A, il ne cesse de croître le long de la branche AB et devient infini en B (en ce point B, le moment de rotation est infini, bien que la vitesse angulaire soit nulle, car le moment d'inertie de l'aiguille infiniment allongée est infini).

47. Etudions spécialement deux cas particuliers. Soit d'abord $\mu = \infty$, c'est-à-dire que la masse M' de l'astre perturbateur C est

supposée négligeable par rapport à la masse liquide M en rotation. La question revient alors à chercher les formes d'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme et soustraite à toute action extérieure, problème connu : les deux branches de courbe AB et OD de notre représentation graphique se rejoignent alors en un point H, et la figure 15 se transforme en la figure 16 ; la ligne OA bissectrice des axes de coordonnées correspond à des ellipsoïdes de révolution (ellipsoïdes de Mac-Laurin) ; la ligne DB correspond à des ellipsoïdes à trois axes inégaux (ellipsoïdes de Jacobi).

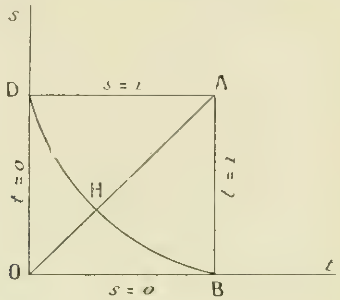


fig. 16.

48. Le second cas particulier que nous envisagerons est celui de $\mu = 0$. La masse fluide en rotation est alors très petite par rapport à la masse de l'astre troublant C (c'est le cas d'une nébuleuse planétaire dont la masse est très petite par rapport à celle du Soleil). Dans ce cas, la branche OD de la figure 15 vient s'aplatir contre l'axe des t, tandis que la branche AB subsiste. Quand on parcourt cette branche AB, la quantité X part de o, passe par un maximum égal à 0,046, puis décroit jusqu'à o. Pour qu'une forme ellipsoïdale d'équilibre soit possible, il est donc nécessaire que l'on ait

$$X = \frac{\omega^2}{2\pi\rho} < 0{,}046.$$

Cette inégalité va fournir une limite supérieure que n'a pas pu dépasser le diamètre d'une nébuleuse planétaire (supposée ellipsoïdale et homogène). Prenons, par exemple, la nébuleuse planétaire qui a engendré Jupiter. Si r désigne un rayon moyen de l'ellipsoïde qu'était initialement cette nébuleuse, la masse M de celle-ci (M est

approximativement la masse de Jupiter) est égale à

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3; \tag{21}$$

d'ailleurs, l désignant la distance de Jupiter au Soleil dont la masse est M', on a

$$\omega^2 l^3 = M'. \tag{22}$$

La comparaison de l'égalité (21) et de l'égalité (22) donne

$$\left(\frac{r}{l}\right)^3 = \frac{3\omega^2}{4\pi\rho}\frac{M}{M'} = \frac{3}{2}\frac{M}{M'}V.$$

Puisqu'il faut que

$$V < 0{,}046$$

et que

$$\frac{M}{M'} = 0{,}001$$

environ, on voit que le rayon moyen r de la nébuleuse de Jupiter devait satisfaire à l'inégalité

$$\left(\frac{r}{l}\right)^3 < \frac{3}{2} \times 0{,}001 \times 0{,}046,$$

d'où l'on tire

$$\frac{r}{l} < 0{,}041.$$

Or $l = 5{,}2$ (le rayon de l'orbite terrestre étant pris pour unité); donc

$$r < 0{,}213.$$

Prenant pour unité le rayon de Jupiter, cette inégalité signifie que r doit être inférieur à 440 rayons de Jupiter.

Ainsi la nébuleuse planétaire qui a engendré Jupiter et son cortège de satellites n'a pas dû avoir initialement un rayon moyen supérieur à 440 rayons actuels de Jupiter. Les satellites n'ont donc pas dû se former à une distance plus grande. En effet, le plus éloigné des satellites actuellement connus est à une distance de la planète égale à 357 rayons. Mais, si l'on venait à découvrir un satellite à une distance notablement [1] supérieure à 440 rayons, il y aurait là un sérieux argument contre la théorie.

---

[1] Je dis *notablement*, car r est le rayon *moyen* de la nébuleuse ; or, celle-ci est allongée vers le Soleil, donc son plus grand rayon peut dépasser sensiblement r.

49. *Cas d'une masse à forte condensation.* — Envisageons à présent l'hypothèse où la nébuleuse planétaire, qui tourne autour du Soleil en un temps égal à celui de sa rotation, présenterait une très forte condensation centrale de masse M, et cherchons la figure d'équilibre relative de son atmosphère.

Adoptons les mêmes axes de coordonnées que précédemment (*fig.* 14). Le potentiel d'attraction dû à la condensation est $\frac{M}{r}$ (nous négligeons l'attraction mutuelle des molécules de l'atmosphère); le potentiel dû à la force centrifuge est

$$\frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2);$$

le potentiel total est

$$U = \frac{M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) + \varepsilon\varphi,$$

$\varepsilon\varphi$ représentant le potentiel dû à l'action perturbatrice du Soleil, situé en C sur l'axe des y (potentiel que nous avons appelé plus haut V_3).

Les surfaces de niveau ont pour équation

$$U = \text{const.}$$

Lorsque $\varepsilon\varphi$ est nul, nous retrouvons l'équation déjà discutée (Section **I**), et les surfaces sont de révolution : l'une d'elles présente un cercle double équatorial formant arête saillante. Mais il n'en est plus de même lorsque $\varepsilon\varphi$ n'est pas nul. Dans ce cas, l'une des surfaces acquerra un *point double* si l'on a à la fois

$$\frac{dU}{dx} = 0, \qquad \frac{dU}{dy} = 0, \qquad \frac{dU}{dz} = 0.$$

La première de ces équations est vérifiée dans le plan $x = 0$, par raison de symétrie ; les deux autres, en prenant des coordonnées polaires, c'est-à-dire en posant

$$y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta,$$

sont équivalentes à

$$\frac{dU}{dr} = 0, \qquad \frac{dU}{d\theta} = 0.$$

Ces deux dernières nous donneront les coordonnées polaires du point double ; on aura

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{M}{r^2} + \omega^2 r + \varepsilon\frac{d\varphi}{dr} = 0;$$

ε étant très petit, cette équation donne approximativement

$$\omega^2 r^3 = M.$$

Ayant ainsi la distance r, nous la portons dans l'équation

$$\frac{dU}{d\theta} = 0,$$

qui donnera l'azimut θ du point double. Comme

$$\frac{dU}{d\theta} = \varepsilon \frac{d\varphi}{d\theta},$$

nous voyons qu'en ce point double la fonction φ passera (en tant que fonction de θ), par un maximum ou par un minimum : on reconnaît aisément qu'elle passera par un maximum.

Dans le cas actuel, la fonction perturbatrice $\varepsilon\varphi$ due à l'action solaire a pour expression

$$\varepsilon\varphi = \frac{M'}{2l^3}(2y^2 - x^2 - z^2),$$

M' désignant comme plus haut la masse du Soleil et l sa distance au centre. Elle présente, pour une valeur donnée de r, deux maxima égaux, en deux points de l'axe des y.

Donc l'une de nos surfaces de niveau présente deux points doubles ou points coniques ; les surfaces de niveau extérieures à celle-là ne sont plus fermées.

50. Jusqu'ici la durée de rotation de la nébuleuse planétaire a été supposée égale à sa durée de révolution, et nous avons dit (n° **43**) que, pendant toute la période où s'est maintenue cette égalité, la nébuleuse n'a pas dû former de satellites. Lorsque, par suite de la condensation, la marée solaire est devenue plus faible, la rotation s'est accélérée, et la nébuleuse planétaire a cessé de présenter constamment au Soleil les mêmes points de sa surface. Roche admet que, dans cette seconde période, l'atmosphère planétaire prend à chaque instant la figure avec laquelle elle pourrait être en équilibre sous l'action du Soleil : sa surface libre est allongée vers le Soleil, et peut acquérir, aux sommets du grand axe, deux points coniques comme ceux dont nous parlions plus haut. C'est par ces deux pointes opposées que la contraction laissera s'échapper l'excès de fluide atmosphérique, et

non plus par toute une arête saillante équatoriale, comme il arrivait pour la nébuleuse solaire de révolution. Donc, au lieu d'un anneau régulièrement disposé autour de la planète, nous aurions une émission de matière s'effectuant par deux points opposés. Roche pense que les diverses masses ainsi délaissées ne présenteraient aucune condition de stabilité ni de durée, et qu'en réalité les satellites ne se sont pas formés dans cette seconde période : ils appartiendraient à une phase bien postérieure où la durée de la rotation se trouvait déjà tellement réduite que l'allongement de la nébuleuse planétaire vers le Soleil était presque négligeable. La nébuleuse planétaire, devenue alors tout à fait comparable à la nébuleuse solaire, aurait abandonné des anneaux ordinaires de Laplace qui auraient engendré les satellites.

Dans ce cas, aucun satellite ne se serait formé avant que la nébuleuse planétaire ne soit assez contractée pour que la différence $R' - R''$, entre son plus grand et son plus petit rayon équatorial, soit descendue au dessous d'une certaine limite Ω. Estimant assez arbitrairement cette limite Ω à 4,5 rayons terrestres, Roche en conclut, pour le rayon R' des différentes nébuleuses planétaires, au moment où elles ont pu commencer à abandonner des anneaux équatoriaux, les valeurs suivantes (exprimées en rayons de la planète correspondante) :

Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
48,6	64,4	155	200

C'est seulement en deçà de ces distances qu'on doit s'attendre à trouver des satellites. Les satellites anciennement connus satisfont bien à cette condition. Mais il n'en est plus de même pour certains satellites récemment découverts : pour Jupiter, par exemple, on connaît un satellite à une distance de la planète égale à 357 rayons. Il y a donc lieu de penser que, contrairement à l'opinion de Roche, les masses gazeuses abandonnées par les deux points coniques de la nébuleuse dans la seconde phase de son existence ont pu concourir à la formation de satellites. Cela, en effet, ne paraît pas impossible à imaginer : les masses successivement abandonnées auraient pu se répartir sur un anneau ; mais si, ce qui est le plus probable, aucun anneau n'avait pu se former, on se serait précisément trouvé dans les mêmes conditions qu'après la rupture de l'anneau devenu instable. Que cet état ait été atteint en passant par une phase d'anneau stable,

ou sans passer par cette phase, la formation d'un satellite aurait toujours pu en résulter par un mécanisme identique.

51. *Cas de la Lune.* — Roche estime que la Lune se présente, à divers points de vue, comme un satellite exceptionnel :

« Elle se distingue, dit-il, par la grandeur de ses dimensions et de sa masse comparées à celles de la Terre, par l'excentricité de son orbite, surtout par sa distance à la Terre. Saturne et peut-être Uranus en ont un aussi éloigné comparativement au rayon de la planète, mais c'est alors le dernier d'une série de satellites. Ici le satellite est unique. » (*Essai sur la constitution et l'origine du système solaire*, n° **52**.)

Ces raisons lui font attribuer à la Lune une origine spéciale :

« Il a pu arriver aussi exceptionnellement, et telle est l'origine probable de la Lune, qu'un amas de vapeurs déjà refroidies s'étant formé au dedans de la nébuleuse terrestre, dans la région équatoriale et à une certaine profondeur, cet amas soit devenu un centre de condensation autour duquel se sont groupés d'autres amas semblables. De cette agglomération est résultée, dans l'atmosphère même de la Terre, une nouvelle nébuleuse, origine de la Lune. » (*loc. cit.*, n° **58**.)

Le système Terre-Lune serait donc comparable, dans cette manière de voir, à une sorte de planète double. Nous sommes donc très loin des idées de Laplace.

52. *Anneau de Saturne.* — Pourquoi le dernier anneau équatorial abandonné par la nébuleuse de Saturne est-il resté sous forme d'anneau et n'a-t-il pas donné un satellite ? C'est, d'après Roche, parce qu'à une aussi faible distance de la planète, une masse fluide ellipsoïdale n'aurait pas pu être en équilibre. Rappelons-nous en effet ce que nous avons dit relativement à une masse fluide homogène, soumise à l'attraction d'un astre central éloigné (ici Saturne) et animée d'une rotation uniforme d'une durée égale à celle de sa révolution. Lorsque la masse fluide est très petite par rapport à celle de l'astre central (cas de $\mu = 0$), nous avons vu (n° **48**) qu'il faut avoir

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} < 0,046$$

pour qu'une forme ellipsoïdale d'équilibre soit possible. Mais la troisième loi de KÉPLER donne

$$\omega^2 = \frac{M'}{l^3},$$

M' désignant ici la masse de Saturne et l sa distance à la masse fluide : il faut donc que

$$\frac{M'}{2\pi\rho_1 l^3} < 0{,}046.$$

Remplaçons M' par $\frac{4}{3}\pi r^3\delta$, r et δ étant le rayon et la densité de Saturne, l'inégalité précédente devient

$$\frac{l}{r} > 2{,}44\sqrt[3]{\frac{\delta}{\rho_1}}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose les deux densités égales, $\delta = \rho_1$, la condition d'existence du satellite fluide est simplement

$$l > 2{,}44\, r.$$

D'où cette conclusion : à une distance de la planète inférieure à deux fois et demie son rayon, un satellite de même densité à l'état fluide ne saurait se maintenir sous forme ellipsoïdale. Comme le rayon moyen de l'anneau de Saturne est inférieur à cette distance, sa matière n'a donc pas pu s'agglomérer en un corps unique. Cela appelle les observations suivantes : à cette distance une forme annulaire fluide ou solide est instable ; nous l'avons vu et nous en avons conclu que l'anneau se composait de satellites très petits et ellipsoïdaux. Mais d'après ROCHE, une figure ellipsoïdale (en supposant l'égalité des vitesses de révolution et de rotation) est également instable. Nous devons donc conclure que les petits satellites dont est composé l'anneau ne présentent pas toujours la même face à Saturne.

VIII. — Objections à la Théorie de Laplace.

53. Nous avons exposé en détail les développements théoriques auxquels ont donné lieu les idées de LAPLACE. Voyons maintenant les quelques objections que l'on peut faire et que l'on a faites en effet à cette théorie.

Le but de Laplace était de rendre compte de la faiblesse des excentricités et des inclinaisons, et du sens direct de tous les mouvements connus de son temps. Son hypothèse explique fort bien les deux premiers de ces phénomènes ainsi que le sens direct de toutes les révolutions des planètes. Quant aux rotations directes, elles sont, avons-nous dit, insuffisamment expliquées par Laplace ; mais nous avons pu en rendre compte d'une façon satisfaisante au moyen de l'effet produit par les marées solaires sur les nébuleuses planétaires (mécanisme qui n'avait pas échappé à Laplace en ce qui concerne la Lune). La marée solaire étant très faible pour les planètes les plus extérieures, nous répondons du même coup à l'objection qu'on pourrait tirer des mouvements rétrogrades des systèmes d'Uranus et de Neptune.

54. On a aussi objecté à la théorie de Laplace l'énormité du temps nécessaire à la transformation d'un anneau en une masse planétaire unique. Un anneau devenu instable s'est rompu en plusieurs masses sphéroïdiques qui, d'après Laplace, ont dû se réunir en une seule. Or, M. Kirkwood a fait remarquer que cette réunion exigerait un temps considérable. Si les fragments de l'anneau étaient distribués à peu près régulièrement le long de l'orbite, leurs actions perturbatrices se détruiraient à très peu de chose près, et on ne pourrait invoquer en faveur de la réunion des morceaux un peu éloignés que la différence de leurs vitesses de révolution. Or, considérant deux fragments de l'anneau de Neptune distants de 180° en longitude, et dont les distances au Soleil différeraient de 1000 milles, M. Kirkwood calcule que leur jonction ne se ferait qu'au bout de 150 millions d'années. Pendant ce temps les masses se seraient refroidies et encroûtées, et cette durée semble beaucoup trop considérable, étant donné l'âge que la Thermodynamique permet d'assigner au système planétaire. Pour échapper à cette grave difficulté, M. Kirkwood propose d'admettre que les planètes ont été projetées par des espèces d'éruptions solaires : elles seraient en quelque sorte assimilables à d'anciennes protubérances que le Soleil aurait comme oubliées en se contractant. Mais dans cette supposition, on ne trouve aucune raison pour expliquer la faible excentricité des orbites. D'ailleurs nous n'avons aucune espèce d'idée du temps qui a pu être nécessaire pour la formation du système solaire. Il est possible, il est probable même que 150 millions

d'années ne représentent qu'une fraction très faible de ce temps. Il n'y a donc rien à retenir de l'objection de M. Kirkwood.

55. Une autre difficulté de l'hypothèse de Laplace provient de ce que plusieurs satellites sont à des distances de leur planète incompatibles avec cette hypothèse. On a dit, par exemple, que la distance de la Lune à la Terre est plus grande que n'a pu être le rayon de l'atmosphère terrestre à l'époque de la formation de la Lune, c'est-à-dire lorsque la nébuleuse terrestre tournait sur elle-même en 27^{jours},3, durée de la révolution de la Lune. La limite de l'atmosphère de cette nébuleuse était en effet le point où la force centrifuge jointe à l'attraction solaire contrebalançait l'attraction terrestre, et l'on a cru pouvoir en déduire que l'atmosphère terrestre ne s'étendait qu'aux trois quarts de la distance de la Lune à la Terre. Mais Roche a montré que cette affirmation est inexacte. Dans le calcul de cette limite de l'atmosphère, ce qui intervient, ce n'est pas l'attraction *absolue* du Soleil, mais, comme dans le calcul des marées, son attraction *relative*, c'est-à-dire la différence entre l'attraction exercée sur une molécule de l'atmosphère et l'attraction exercée sur le centre de la Terre. On trouve, avec cette rectification, qu'à l'époque indiquée l'atmosphère terrestre atteignait la distance de la Lune. La *grande* distance de la Lune n'est donc pas une objection à la théorie de Laplace.

Il n'en est pas de même pour les *petites* distances auxquelles se trouvent le premier satellite de Mars et l'anneau intérieur de Saturne. D'après l'hypothèse de Laplace, « tous les corps qui circulent autour d'une planète ayant été formés par les zones que son atmosphère a successivement abandonnées, et son mouvement de rotation étant devenu de plus en plus rapide, la durée de ce mouvement doit être moindre que celles de la révolution de ces différents corps. » (*Exposition du Système du Monde,* p. 503.) Or, on sait que le satellite le plus voisin de Mars (Phobos) et l'anneau intérieur de Saturne ont une durée de révolution moindre que la durée actuelle de rotation de la planète. On peut, pour expliquer cette anomalie, avoir recours à la formation d'*anneaux intérieurs* par la rencontre de traînées elliptiques, telle qu'elle a été indiquée par Roche (n° **24**). Le satellite de Mars se serait ainsi formé à l'intérieur même de l'atmosphère primitive de la planète, c'est-à-dire à une distance inférieure à celle que lui avait assignée Laplace. Ce satellite aurait ensuite subi la résistance

de milieu de cette atmosphère, ce qui aurait pu contribuer à rétrécir son orbite et, par conséquent, à augmenter sa vitesse de révolution. L'hypothèse de Laplace est ainsi sauvée, mais au prix d'une modification profonde.

56. Enfin la découverte récente, autour de Jupiter et de Saturne, de satellites à révolution rétrograde, crée une nouvelle difficulté. On pourrait essayer de la lever en considérant, comme au n° **42** (p. 51), deux masses M et M′ provenant de la rupture de l'anneau (*fig.* 13) : la masse M′ sera supposée très petite, la masse M, provenant de la réunion antérieure de plusieurs noyaux, sera supposée très grande. Lorsque la masse M rejoindra et dépassera la masse M′, elle pourra ne pas la choquer, mais elle pourra la capter (si cette masse secondaire pénètre dans l'atmosphère de la masse principale, et si la résistance de cette atmosphère réduit la vitesse relative des deux masses) et s'en faire un satellite à révolution rétrograde. On pourrait supposer également que le satellite s'est formé par le mécanisme ordinaire à l'époque où la rotation de la nébuleuse planétaire était encore rétrograde. Le mécanisme de la marée solaire continuant à agir sur la masse planétaire, celle-ci prendra un mouvement de rotation direct, et les satellites ultérieurement formés seront à révolution directe.

CHAPITRE IV.

HYPOTHÈSE DE H. FAYE.

57. Dans le système cosmogonique de Hervé Faye [1], l'espace est dès l'origine rempli par « un chaos général excessivement rare, formé de tous les éléments de la Chimie terrestre plus ou moins mêlés et confondus. Ces matériaux, soumis d'ailleurs à leurs attractions mutuelles, étaient dès le commencement animés de mouvements divers qui en ont provoqué la séparation en lambeaux ou nuées. Ceux-ci ont conservé une translation rapide et des gyrations intestines plus ou moins lentes. Ces myriades de lambeaux chaotiques ont donné naissance, par voie de condensation progressive, aux divers mondes de l'univers. » (p. 258.)

Les gyrations intestines, placées par Faye dans ses lambeaux chaotiques, sont analogues aux mouvements tourbillonnaires que nous observons aujourd'hui dans les nébuleuses spirales.

Des résultats fort différents pourront se produire suivant l'intensité de ces mouvements gyratoires, et suivant la forme des lambeaux.

Si le lambeau est un amas sphérique homogène, sans mouvements intérieurs d'aucune sorte, sa condensation donnera une étoile sans satellites et sans rotation. Si, étant sphérique et homogène, ce lambeau est le siège de mouvements de gyration se compensant réciproquement, il produira soit un amas sphérique d'étoiles décrivant toutes dans le même temps des ellipses ayant leur centre au centre de gravité et de figure de l'amas, soit une étoile centrale accompagnée d'une foule de petits corps rapidement éteints, la condensation centrale l'ayant considérablement emporté sur les condensations partielles. Dans les deux cas, les gyrations se compensant, le moment de

[1] H. Faye : *Sur l'Origine du Monde*, 4e édit. (Paris, Gauthier-Villars, 1907). Chap. XIII et XIV.

rotation total est nul ; les orbites sont orientées dans des directions diverses et décrites aussi bien dans un sens que dans l'autre.

Un cas beaucoup plus général sera « celui d'un amas non sphérique, non homogène et animé de tourbillonnements susceptibles de se résoudre en une gyration unique. » (p. 262.) La condensation s'opérant alors autour de quelques centres d'attraction, finira par former deux ou trois globes séparés : d'où la formation d'une étoile double ou multiple. « Et comme, dans la série des mouvements des corpuscules se précipitant vers des corps distincts, il n'a dû se présenter aucun moyen de régularisation capable d'imprimer la forme circulaire à leurs trajectoires, les étoiles finales, associées par couples, décriront des ellipses plus ou moins excentriques, ayant leur foyer commun au centre de gravité. » (p. 263.)

Abordons maintenant la formation de notre système solaire. Ce système présente cette remarquable particularité que les orbites des planètes sont presque circulaires. « Il faut donc que, parmi les conditions initiales de notre lambeau chaotique, il s'en soit trouvé une qui ait empêché les gyrations de dégénérer en mouvements elliptiques, et qui ait rectifié d'abord et fermement conservé ensuite la forme à peu près circulaire à travers toutes les péripéties. » (p. 265.) Faye suppose que le chaos partiel, le lambeau d'où est sorti le système solaire, était à l'origine une sorte de nébuleuse *sphérique et homogène* et que cette nébuleuse possédait un lent mouvement tourbillonnaire affectant une partie de ses matériaux. Il pense qu'à l'intérieur de cette nébuleuse se formeront des anneaux concentriques animés d'un mouvement de rotation commun, semblables à l'anneau dont la nébuleuse de la Lyre nous offre un exemple :

« Les mouvements tourbillonnaires que ce lambeau chaotique emporte dans son sein affectent une forme spiraloïde avec des vitesses dirigées à peu près perpendiculairement au rayon vecteur. Ces vitesses vont en croissant vers le centre. Il y aurait donc peu à faire pour transformer, en partie, un mouvement de ce genre en une véritable rotation, si cette dernière était compatible avec la loi de la pesanteur interne.

« Or, c'est précisément le propre de ce genre d'amas chaotique de ne permettre aux corps qui s'y meuvent que des révolutions elliptiques ou circulaires concentriques et de même durée. Des portions

notables des tourbillons intérieurs pourront donc y prendre l'allure d'un anneau plat, tournant autour du centre avec une même vitesse angulaire, exactement comme si cet anneau nébuleux était un cerceau solide. Il n'y a à cela qu'une condition, c'est que la durée de la gyration de ces particules soit égale à la durée commune de tous les mouvements elliptiques ou circulaires qui se produisent sous l'influence de la force centrale.

« Ainsi toutes les particules qui auront la vitesse convenable, dans le plan des gyrations, s'arrangeront immédiatement sous l'influence de la gravité en anneau plat, animé, autour du centre, d'une véritable rotation. Les autres, à vitesses trop grandes ou trop petites, se mouvront dans le même plan, en décrivant des ellipses concentriques à l'anneau. Si ces ellipses sont très allongées, les matériaux qui les parcourent se rapprochent beaucoup du centre où s'opèrera une condensation progressive ; ils finiront par y être englobés, tout en communiquant au globe central naissant une rotation dans le plan même de la gyration primitive. Si elles diffèrent peu d'un cercle, la faible résistance du milieu suffira pour uniformiser la vitesse et disposer les matériaux en anneaux tournant comme le premier. » (p. 266-267.)

58. Nous constatons ici une première différence essentielle entre la conception de Faye et celle de Laplace : les anneaux de Laplace se formaient à l'extérieur de la nébuleuse, ceux de Faye se forment à l'intérieur. Seulement, tandis que Laplace rendait parfaitement compte de la faiblesse des excentricités et des inclinaisons mutuelles de ces anneaux, Faye donne de ce phénomène une explication beaucoup moins nette. Le but principal que Laplace s'était proposé ne se trouve ainsi qu'imparfaitement atteint. Dans les deux théories, c'est la rupture des anneaux, devenus instables, qui donne naissance aux planètes.

59. Mais suivons l'évolution de la nébuleuse de Faye. Au début, elle était sphérique et homogène ; l'attraction à l'intérieur était proportionnelle à la distance r au centre et pouvait être représentée par

$$Ar,$$

A désignant une constante. Plus tard, l'attraction mutuelle des parties, jointe aux chocs et aux frottements inévitables entre particules, produisit nécessairement une condensation centrale ; celle-ci

s'est peu à peu nourrie aux dépens de l'atmosphère nébulaire qui se raréfiait de ce fait. C'est ainsi que le Soleil s'est finalement formé vers le centre par la réunion de tous les matériaux non engagés dans les anneaux, faisant ainsi le vide autour de lui. Dans cet état final, qui est l'état actuel, l'attraction est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre ; elle a pour expression

$$\frac{B}{r^2},$$

B étant une nouvelle constante.

Dans la période intermédiaire, Faye admet que la loi d'attraction, en fonction de la distance r, peut se représenter par l'expression

$$\text{(E)} \qquad ar + \frac{b}{r^2},$$

où a va en diminuant de A à o et b en augmentant de o à B.

Cette loi correspondrait exactement à une nébuleuse formée d'un noyau central d'une certaine masse qu'envelopperait une atmosphère parfaitement homogène. Il est peu vraisemblable que la nébuleuse solaire ait offert cette constitution dans la période intermédiaire. La loi d'attraction réelle avait sans doute une forme beaucoup plus compliquée ; la loi simple proposée par Faye nous donne donc simplement une idée approchée de la façon dont pouvait varier la pesanteur à l'intérieur de la nébuleuse primitive.

60. Étudions maintenant comment se comportent les anneaux de Faye au point de vue de leur rotation.

Considérons une molécule quelconque d'un anneau. Sa trajectoire est circulaire et sa force centrifuge fait équilibre à l'attraction. Si l'on appelle ω sa vitesse angulaire, on a, d'après l'expression (E)

$$\omega^2 r = ar + \frac{b}{r^2},$$

d'où l'on tire

$$\omega r = \sqrt{ar^2 + \frac{b}{r}}.$$

Or, ωr est la vitesse *linéaire* de la molécule : si cette vitesse croît avec r, les molécules externes auront une vitesse supérieure à celle des molécules internes, et l'anneau, après sa rupture, donnera une pla-

nète à rotation directe. Au contraire, si ωr est une fonction décroissante de r, la planète issue de l'anneau aura une rotation rétrograde.

Voyons donc dans quel sens varie ωr, c'est-à-dire dans quel sens varie l'expression

$$ar^2 - \frac{b}{r}.$$

Ce sens dépend du signe de la dérivée

$$2ar - \frac{b}{r^2}.$$

Tant qu'on aura l'inégalité

$$(1) \qquad 2a > \frac{b}{r^3},$$

l'anneau engendrera une planète à rotation directe. La rotation de la planète sera indirecte si cette inégalité n'est pas vérifiée. Or, au début, b est nul, donc l'inégalité est satisfaite partout. Mais, avec le temps, b croît et a décroît, donc à chaque distance r il arrivera un moment où l'inégalité cessera d'être vérifiée. Une planète formée après cette époque aura une rotation rétrograde.

Les rotations sont donc directes lorsque a est grand et b petit, c'est-à-dire au commencement. Ainsi, d'après FAYE, les planètes à rotation directe sont les plus anciennement formées : l'âge relatif des différentes planètes est inverse de celui que leur assignait LAPLACE.

61. Dans cette hypothèse, la Terre serait non seulement plus vieille que Jupiter ou Neptune par exemple, mais beaucoup plus vieille même que le Soleil, puisqu'au moment où elle s'est formée, a était grand et b petit ; par suite, la condensation centrale de la nébuleuse était très faible.

Les géologues estiment que le dépôt des sédiments terrestres, depuis le début de l'ère primaire, a exigé un minimum d'une centaine de millions d'années. Or, nous verrons plus tard qu'HELMHOLTZ et Lord KELVIN, au nom de la Thermodynamique, assignent au Soleil un âge qui ne dépasse pas une cinquantaine de millions d'années. FAYE regardant la Terre comme beaucoup plus ancienne que le Soleil espère faire disparaître cette contradiction inquiétante. Mais observons que l'étude des fossiles de l'époque cambrienne nous invite à penser que les conditions générales de la vie n'étaient pas alors extrêmement différentes de ce qu'elles sont aujourd'hui, et il paraît assez difficile

d'admettre que les êtres de cette époque aient vécu sans soleil, ou mieux encore, à l'intérieur de l'atmosphère solaire.

62. Les comètes, d'après Laplace, étaient des corps étrangers au système solaire, mais appelés dans ce système par l'attraction. D'après Faye, ces astres appartiennent originellement au système solaire : « Parmi les matériaux non engagés dans le tourbillon primitif, et décrivant en tous sens des ellipses allongées autour du centre, il a dû s'en trouver qui échappèrent à la condensation centrale. Ces matériaux, partis des limites du chaos primitif, ont continué à se mouvoir dans des courbes allongées. » (p. 273.) Ils ont donné les comètes dont les orbites sont devenues des ellipses presque paraboliques ayant leur foyer à l'endroit où les premières avaient leur centre.

63. Nous avons exposé les points essentiels de la théorie de Faye. Cette théorie fut imaginée principalement pour expliquer ce fait que les systèmes planétaires intérieurs sont directs tandis que les systèmes planétaires extérieurs sont rétrogrades. Faye croit ce fait absolument inconciliable avec l'hypothèse des anneaux de Laplace, car ces anneaux doivent, selon lui, donner des planètes toujours rétrogrades [1]. Les planètes se séparent donc ici en deux catégories très nettes : les planètes directes (les plus rapprochées) dont la formation est antérieure à celle du Soleil, et les planètes rétrogrades (les plus éloignées) dont la formation est postérieure à celle du Soleil [2].

Laplace, n'ayant connaissance que de mouvements directs, avait annoncé que si l'on venait à découvrir une nouvelle planète ou un nouveau satellite, il y aurait des milliers de milliards à parier contre un que la circulation de ce satellite ou la rotation de cette planète serait directe. Personne ne tint le pari, mais Laplace l'aurait perdu : la découverte de Neptune et de son satellite lui ont donné un démenti. Aux yeux de Faye, c'était là la faillite de la théorie de Laplace et c'est ce qui l'engagea à en proposer une autre. Pour lui, les diverses

---

[1] Nous avons vu que l'effet des marées solaires permet de répondre à cette objection.

[2] La planète Uranus se serait formée à une époque de transition, intermédiaire entre celle des planètes à satellites franchement directs et celle de Neptune à satellite franchement rétrograde. La rotation, d'abord directe, aurait été forcée ensuite de devenir rétrograde, de là serait résulté un conflit, contraignant l'équateur de la planète naissante à s'incliner sur le plan de l'orbite, jusqu'à lui devenir perpendiculaire et à dépasser même un peu cette position vers le sens rétrograde.

planètes peuvent aussi bien tourner sur elles-mêmes dans un sens que dans l'autre — cela dépend de l'époque de leur formation ; — mais il aurait volontiers parié à son tour que les satellites se mouvront toujours autour de leurs planètes respectives dans le sens de rotation de celles-ci. Lui aussi, il aurait perdu : on connait aujourd'hui des satellites qui circulent autour de Jupiter et de Saturne dans le sens rétrograde. Restant dans l'ordre d'idées de Faye, on pourrait essayer d'expliquer le mouvement rétrograde de ces satellites autour de leurs planètes par des considérations analogues à celles que nous avons données à la fin du Chapitre précédent. Les premiers satellites de Jupiter, par exemple, auraient été formés pendant la période directe, c'est-à-dire quand l'inégalité (1) était encore vérifiée à la distance de Jupiter, le dernier aurait été capté plus tard, pendant la période rétrograde, comme nous l'expliquions au n° **56** (p. 67).

64. Examinons à présent un point capital pour la théorie. Au moment où chaque planète se forme, son orbite est circulaire, puisque, par hypothèse, la planète provient d'un anneau. Nous avons vu que sur ce point les explications de Faye ne sont pas entièrement satisfaisantes ; nous ne reviendrons pas là-dessus, et nous les admettrons provisoirement. Mais la loi d'attraction *varie avec le temps*. A supposer que l'orbite ait été initialement circulaire, a-t-elle pu rester circulaire ? Montrons qu'il en est bien ainsi.

Représentons par $\varphi(r, t)$ la loi d'attraction, variable avec la distance r de la planète au centre, et variable aussi, lentement, avec le temps t. Le rayon vecteur r satisfait à l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \varphi = 0,$$

où $\frac{d\theta}{dt}$ désigne la vitesse angulaire. La force étant centrale, nous avons l'équation des aires

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C,$$

C étant une constante. L'équation précédente s'écrit alors

$$(2) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + \varphi = 0.$$

Introduisons une fonction $H(r, t)$ définie par l'équation

$$\frac{dH}{dr} = -\frac{C^2}{r^3} + \varphi;$$

(dans l'hypothèse de Faye, où nous avons

$$\varphi = ar + \frac{b}{r^2},$$

la fonction H serait

$$H = \frac{C^2}{2r^2} + \frac{ar^2}{2} - \frac{b}{r};$$

mais nous restons ici dans le cas général où H est une fonction quelconque connue de r et de t). L'équation (2) s'écrit alors

$$(3) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dH}{dr} = 0.$$

Dans le cas où H ne dépend pas de t, cette équation, multipliée par $\frac{dr}{dt}$ et intégrée, donne immédiatement l'équation des forces vives

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + H = T,$$

où T est une constante.

Dans le cas actuel où H dépend de t, nous *posons* cette même équation (4) : elle servira de définition à T, qui n'est plus une constante, mais une quantité qui dépend du temps. Calculant la dérivée $\frac{dT}{dt}$ de T par rapport au temps, on trouve

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dH}{dt} + \left(\frac{dH}{dr} + \frac{d^2r}{dt^2}\right)\frac{dr}{dt}.$$

La parenthèse du second membre étant nulle d'après l'équation (3), $\frac{dT}{dt}$ est égal à la dérivée partielle de H par rapport au temps :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dH}{dt}.$$

Dans le cas où l'attraction ne dépend pas du temps, nous obtenons la distance aphélie r_0 en écrivant que

$$\frac{dr_0}{dt} = 0.$$

Si nous appelons H_0 la valeur de H pour $r = r_0$, l'équation

$$H_0 = T \tag{5}$$

définit alors la distance aphélie r_0 et aussi la distance périhélie.

Dans le cas où l'attraction varie lentement avec le temps, nous pouvons continuer à dire que cette même équation (5) définit, à chaque instant t, la distance *aphélie osculatrice*, c'est-à-dire la distance aphélie de l'orbite que décrirait la planète si la loi d'attraction cessait de varier à cet instant t.

Cette définition semblera justifiée si l'on remarque qu'à l'instant où la distance r passe par un maximum on a $\frac{dr}{dt} = 0$, et que par conséquent $H = T$; à ce moment on a également $r = r_0$ et par conséquent $H_0 = T$.

Ce qui caractérise un mouvement circulaire, c'est que la distance aphélie est égale à la distance périhélie, c'est-à-dire que l'équation

$$H = T$$

a une racine double r; cette racine double satisfait aussi à l'équation

$$\frac{dH}{dr} = 0.$$

Inversement si la distance aphélie annule $\frac{dH}{dr}$, l'équation précédente a une racine double et l'orbite est circulaire.

Supposons donc qu'à l'instant initial t les deux équations

$$H = T$$

et

$$\frac{dH}{dr} = 0$$

ont une racine commune r, rayon de l'orbite circulaire de la planète. Si, à une époque un peu ultérieure $t + dt$, l'orbite a cessé d'être circulaire, sa distance aphélie r_0 sera donnée par l'équation

$$H_0 = T.$$

Étudions les variations de r_0, et pour cela différentions la dernière équation par rapport à t. Nous obtenons

$$\frac{dH_0}{dr_0}\frac{dr_0}{dt} + \frac{dH_0}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dH}{dt}. \tag{6}$$

Or, r_0 différant peu de r, nous avons

$$\frac{dH_0}{dr_0} = \frac{dH}{dr} + (r_0 - r)\frac{d^2H}{dr^2}$$

et

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{dH}{dt} + (r_0 - r)\frac{d^2H}{dr\,dt}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (6) en nous souvenant que $\frac{dH}{dr}$ est nul ; nous trouvons l'équation

$$\frac{d^2H}{dr^2}\frac{dr_0}{dt} + \frac{d^2H}{dr\,dt} = 0.$$

Comme r_0 diffère peu de r, l'équation précédente s'écrit

$$\frac{d^2H}{dr\,dt} + \frac{d^2H}{dr^2}\frac{dr}{dt} = 0.$$

Le premier membre est la dérivée totale de $\frac{dH}{dr}$ par rapport au temps. Cette dernière équation nous montre que $\frac{dH}{dr}$, nul à l'époque t, reste nul à l'époque $t + dt$. L'orbite initialement circulaire reste donc circulaire, mais son rayon r varie avec le temps.

65. Il y a un cas où nous pouvons étudier la question de beaucoup plus près. Supposons que, dans la formule de Faye

$$\varphi(r, t) = ar + \frac{b}{r^2},$$

a soit nul : ce serait, par exemple, le cas où la nébuleuse de Faye posséderait un noyau déjà très condensé, avec une atmosphère de *densité* négligeable, mais de *masse* importante vu la grande distance où elle s'étend ; cette atmosphère tombe peu à peu sur le noyau central pour augmenter sa masse. En d'autres termes, nous allons étudier le mouvement d'une planète attirée suivant la loi de Newton par un soleil dont la masse (que nous désignerons par M) varie lentement avec le temps.

Dans ce cas, la fonction que nous appelons H a pour expression

$$H = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{M}{r};$$

par suite

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dH}{dt} = -\frac{1}{r}\frac{dM}{dt}.$$

Or, T est la constante des forces vives qui, dans le mouvement képlérien, a pour valeur $-\frac{M}{2a}$, $2a$ étant le grand axe de l'orbite ; nous avons donc

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{M}{2a}\right) = -\frac{1}{r}\frac{dM}{dt}$$

ou

$$(7) \qquad d\left(\frac{M}{2a}\right) = \frac{dM}{dt}\frac{dt}{r}.$$

Nous pouvons admettre que, pendant le temps d'une révolution de la planète, $\frac{dM}{dt}$ reste sensiblement constant. Calculons $\frac{dt}{r}$ ou plutôt sa *valeur moyenne* pendant une révolution. En désignant par n et u le moyen mouvement et l'anomalie excentrique de la planète, par e l'excentricité de son orbite, nous avons

$$nt = u - e \sin u,$$

d'où nous tirons, n et e ne variant que très lentement,

$$n\,dt = du\,(1 - e \cos u)\,;$$

d'ailleurs, une formule bien connue du mouvement elliptique donne

$$r = a\,(1 - e \cos u)\,;$$

donc

$$n\frac{dt}{r} = \frac{du}{a}.$$

Or, pendant une révolution, a est une constante, et du a pour valeur moyenne $n\,dt$; donc

$$\text{moyenne de } \frac{dt}{r} = \frac{dt}{a}.$$

La formule (7) donne par conséquent pour la variation séculaire du grand axe

$$d\left(\frac{M}{2a}\right) = \frac{dM}{a}$$

ou

$$a\,dM + M\,da = 0,$$

et par suite

$$Ma = \text{const.}$$

Le grand axe varie donc inversement à la masse du Soleil.

D'ailleurs, si nous appelons b le petit axe de l'orbite elliptique, la constante des aires C a pour valeur

$$C = \sqrt{M}\,\frac{b}{\sqrt{a}}\,;$$

nous avons donc

$$\frac{Mb^2}{a} = \text{const.},$$

et

$$\frac{M^2b^2}{Ma} = \text{const.}\,;$$

Ma étant lui-même constant, Mb l'est aussi. Les deux axes $2a$ et $2b$ de l'orbite de la planète varient donc proportionnellement l'un à l'autre. L'orbite de la planète — et ici nous n'avons pas eu besoin de supposer son excentricité très petite — reste donc constamment semblable à elle-même. Elle se rapetisse à mesure que la masse M du Soleil augmente.

66. Ainsi, dans l'hypothèse de Faye, l'orbite d'une planète reste toujours quasi-circulaire, mais le rayon de cette orbite va en diminuant ; les planètes s'approchent de plus en plus du Soleil à mesure que celui-ci augmente de masse (1).

Demandons-nous quelles pouvaient être, à l'origine, les distances des diverses planètes au centre de la nébuleuse. Pour une planète dont a est le rayon de l'orbite actuelle et dont ω est la vitesse angulaire, le moment de rotation est

$$\omega a^2\,;$$

ce moment de rotation n'ayant pas dû varier, si ω' est la vitesse an-

(1) Si la planète a un satellite (ou plusieurs), ce rapprochement entraîne, comme effet secondaire, une légère augmentation de la distance du satellite à la planète : conséquemment, la durée du *mois* augmente, tandis que celle de l'*année* diminue.

gulaire et a' le rayon de l'orbite de la planète à l'origine, on a

$$\omega a^2 = \omega' a'^2. \tag{8}$$

Or, à l'origine, la nébuleuse de FAYE était sphérique et homogène, l'attraction était donc proportionnelle à la distance au centre, par suite ω' était le même pour toutes les planètes. Supposons, par exemple, que la nébuleuse primitive homogène ait eu le rayon de l'orbite actuelle de Neptune (ce qui est un minimum) : alors son attraction sur Neptune aurait été la même que si toute sa masse avait été concentrée en son centre. Sa condensation ultérieure en un Soleil central n'a rien dû changer au mouvement de Neptune, qui lui restait toujours extérieur. La valeur de ω' est donc, dans cette hypothèse, la vitesse angulaire actuelle de Neptune, et la formule (8) permet de calculer la distance initiale a' de chaque planète au centre de la nébuleuse. On peut ainsi former le Tableau suivant, où l'on a mis en regard la distance actuelle et la distance initiale des planètes au Soleil, le rayon actuel de l'orbite terrestre étant pris comme unité :

Planètes	Distance actuelle a	Distance initiale a'
Mercure	0,4	10
Vénus	0,7	11
la Terre	1	13
Mars.	1,5	14
Jupiter.	5,2	20
Saturne	9,5	22
Uranus.	19,1	27
Neptune	30	30

Nous voyons, par exemple, que Mercure se serait formé à peu près à la distance où se trouve aujourd'hui Saturne. Si le rayon R de la nébuleuse homogène primitive avait été encore plus grand, les distances a' se trouveraient encore augmentées. L'attraction est initialement représentée par Ar, A étant proportionnel à la densité de la nébuleuse, c'est-à-dire à $\frac{1}{R^3}$; ω' égal à $\sqrt{A}$ est donc proportionnel à $R^{-\frac{3}{2}}$; comme $\omega' a'^2$ a une valeur constante, nous concluons que a' est proportionnel à $R^{\frac{3}{4}}$.

Donc, si la nébuleuse primitive a eu un rayon double de la distance actuelle de Neptune, c'est par $2^{\frac{3}{4}}$ qu'il faut multiplier les nombres de la dernière colonne du Tableau ci-dessus. Si l'on admet que la nébuleuse solaire touchait à l'origine celle de l'étoile la plus voisine (α du Centaure), qui se trouve éloignée à une distance de l'ordre de 200 000 rayons de l'orbite terrestre, c'est par un nombre de l'ordre de $\left(\frac{100\,000}{30}\right)^{\frac{3}{4}}$ qu'il convient de multiplier les distances a'. Dans l'hypothèse de Faye, c'est donc à d'énormes distances que les planètes se seraient formées.

L'hypothèse de Faye présente en résumé un caractère ingénieux ; mais elle rend moins facilement compte que celle de Laplace de la faiblesse des excentricités et des inclinaisons. Elle a été imaginée à la suite de certaines objections qui avaient été opposées à la théorie de Laplace ; nous avons vu plus haut comment la plupart de ces objections avaient pu être écartées et avaient été victorieusement réfutées par les partisans des idées de Laplace. La principale difficulté, ignorée d'ailleurs de Faye, provient du mouvement rétrograde des satellites extérieurs de Jupiter et de Saturne ; mais elle n'est pas mieux expliquée par la nouvelle théorie que par l'ancienne.

CHAPITRE V.

HYPOTHÈSE DE M. DU LIGONDÈS (1).

67. Le point très original de la théorie de M. DU LIGONDÈS consiste dans l'idée qu'il se fait du chaos primitif :

« A l'origine l'Univers se réduisait à un chaos général extrêmement rare, formé d'éléments divers mus en tous sens et soumis à leurs attractions mutuelles ...

« Ce chaos s'est partagé en lambeaux qui ont donné naissance, par voie de condensation progressive, à tous les Mondes de l'Univers. » (*Formation mécanique du système du Monde*, p. 14.)

Nous sommes loin, on le voit, de la nébuleuse de LAPLACE qui tournait tout d'une pièce avec une vitesse de rotation bien uniforme. Les tourbillons et gyrations intestines dont FAYE dotait sa nébuleuse primitive sont aussi supprimés. Nous sommes, en quelque sorte, « revenus aux idées de KANT, avec le mouvement en plus, non pas le mouvement régulier de la rotation ou des tourbillons, mais le mouvement sans ordre apparent. » (p. 14.)

Nous devons donc nous représenter l'un quelconque des lambeaux nébuleux en lesquels le chaos initial s'est partagé, par suite de la tendance de toutes les molécules à se porter vers les régions les plus denses, comme formé par un très grand nombre de masses séparées, s'attirant les unes les autres, se mouvant en tous sens et pouvant arriver à se choquer de temps à autre. Les vitesses de tous ces projectiles ne sont soumises à aucune loi : la seule loi sera celle des grands nombres :

(1) Lieutenant-Colonel R. DU LIGONDÈS : *Formation mécanique du système du Monde* (Paris, Gauthier-Villars, 1897).

« Nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature de ces mouvements; nous les abandonnons entièrement à ce qu'on est convenu d'appeler le hasard. C'est en cela que l'hypothèse dont nous allons développer les conséquences diffère essentiellement de toutes celles qui ont été émises jusqu'ici; c'est ce qui lui donne un caractère de vraisemblance et de généralité qui doit, *a priori*, la faire préférer à toute autre. L'hypothèse de Kant, malgré son apparente simplicité, est moins générale que la nôtre, puisque la matière y est primitivement en repos; le repos n'est qu'un cas particulier du mouvement. » (p. 15.)

68. Examinons maintenant comment M. du Ligondès fait, d'un des lambeaux chaotiques, naître le système solaire.

Observons tout de suite — c'est là un point capital — que M. du Ligondès n'est pas en contradiction avec le principe des aires, comme l'était Kant qui supposait sa nébuleuse initiale partant du repos. Les projectiles dont se compose le lambeau ont leurs vitesses distribuées *au hasard*. Considérons alors les vecteurs qui représentent le moment de la quantité de mouvement de chacun de ces projectiles par rapport au centre de gravité du lambeau : ces vecteurs seront orientés dans tous les sens et auront des grandeurs diverses; et, puisque le mouvement est supposé complètement désordonné, la *somme géométrique* de tous ces vecteurs sera très petite par rapport à leur *somme arithmétique*, c'est-à-dire par rapport à ce qu'elle serait si tous ces vecteurs avaient même direction; mais en général *elle ne sera pas nulle*. Or, cette somme géométrique, c'est précisément le moment de rotation total du système, moment qui doit demeurer constant à partir de l'instant où le lambeau considéré est suffisamment séparé des autres pour pouvoir être regardé comme isolé. Il n'y a donc, *a priori*, aucune contradiction à faire sortir le système solaire d'un pareil lambeau nébuleux chaotique.

69. Cherchons à nous faire une idée de la somme géométrique et de la somme arithmétique des vecteurs dont nous venons de parler, et du rapport de ces deux sommes. La somme géométrique, nous la connaissons, c'est le moment de rotation actuel du système solaire. Pour essayer d'évaluer grossièrement la somme arithmétique, assimilons la nébuleuse chaotique initiale à une sphère homogène ayant une masse M égale à la masse totale du système solaire, et un rayon R

égal à 100 000 unités astronomiques [1]. A l'intérieur d'une telle sphère homogène, l'attraction est proportionnelle à la distance au centre et toutes les molécules décrivent des ellipses dans le même temps. Pour calculer ce temps, considérons une molécule décrivant une orbite circulaire ayant justement pour rayon 100 000 unités. Cette molécule se mouvant comme si toute la masse de la nébuleuse était concentrée au centre, sa durée de révolution se calculera suivant la troisième loi de KÉPLER : elle aura pour valeur $(100000)^{\frac{3}{2}}$, soit environ 30 millions d'années. Une molécule m décrivant dans ce temps une ellipse d'axes $2a$ et $2b$ aura donc pour moment de rotation

$$m \frac{2\pi ab}{30\,000\,000}.$$

et la somme arithmétique des moments de rotation de toutes les molécules sera

$$S_a = \frac{2\pi}{30 \times 10^6} \sum mab,$$

la somme Σ étant étendue à toutes les molécules qui constituent la nébuleuse. Pour calculer cette somme nous aurions besoin de connaître l'ellipse décrite par chaque molécule. Or, nous n'avons pas la moindre idée de la façon dont varient ces ellipses d'une molécule à l'autre, et il semble difficile de faire à ce sujet une hypothèse qui puisse se justifier. Mais, cherchant ici seulement un *ordre de grandeur*, nous remarquons que, pour la plupart des molécules, a et b sont *comparables* au rayon R de la nébuleuse sphérique et nous nous contentons d'écrire, avec une approximation grossière

$$S_a = \frac{2\pi R^2}{30 \times 10^6} \sum m$$

$$= \frac{2\pi R^2}{30 \times 10^6} M.$$

Quant à la somme géométrique S_g, qui est le moment de rotation du système solaire, voici comment on peut l'évaluer. Le calcul montre que la sphère homogène de rayon R = 100 000 unités devrait, pour

---

[1] L'unité astronomique est la distance moyenne de la Terre au Soleil. Les étoiles les plus voisines du Soleil en sont à une distance de l'ordre de 200 000 unités astronomiques.

avoir un moment de rotation égal à celui du système solaire, tourner sur elle-même d'un seul bloc en 10^{12} années. Son moment de rotation, égal au produit de son moment d'inertie par sa vitesse angulaire, aurait alors pour expression

$$S_a = \frac{2}{5} MR^2 \times \frac{2\pi}{10^{12}}.$$

Le rapport $\frac{S_g}{S_a}$ de la somme géométrique à la somme arithmétique des moments de rotation des molécules est donc *de l'ordre* de $\frac{30 \times 10^6}{10^{12}}$, soit à peu près de l'ordre de $\frac{1}{30\,000}$ (¹).

Il faut donc penser que, dans le lambeau nébuleux chaotique d'où est sorti le système solaire, le hasard a établi cette légère prédominance des moments de rotation dans un certain sens. Pour d'autres lambeaux, la prédominance a pu être plus forte : ce fut le cas de ceux qui ont donné naissance à des systèmes d'étoiles doubles. M. DU LIGONDÈS remarque en effet que les étoiles doubles ont en général un moment de rotation beaucoup plus grand (²) que celui du système solaire (car, pour ce dernier, la masse presque totale du système se trouve concentrée près du centre de gravité).

70. Chaque molécule décrivant approximativement une ellipse autour du centre de la nébuleuse, l'état chaotique persisterait indéfiniment s'il ne se produisait pas de chocs entre les différents projectiles. Mais ces projectiles se rencontreront inévitablement de temps à autre, et de leurs chocs résultera un double effet :

1° Une concentration de la nébuleuse, une tendance à la formation d'un noyau central se produira, car deux projectiles qui se heurtent se collent ensemble et n'en forment plus qu'un ; il y a perte de force vive, ce qui se traduit par une chute des matériaux vers le centre.

2° Le sphéroïde qu'est la nébuleuse chaotique initiale s'aplatira.

(¹) Ce rapport dépend évidemment du rayon R que l'on assigne à la nébuleuse initiale, et ce rayon peut être choisi arbitrairement. Si, par exemple, au lieu de prendre $R = 100\,000$ unités, nous avions pris $R = 30$ unités, c'est-à-dire le rayon de l'orbite de Neptune, nous aurions trouvé $\frac{S_g}{S_a}$ de l'ordre de $\frac{1}{500}$. Contentons-nous de remarquer que ce rapport est toujours petit.

(²) 250 fois environ pour la 61ᵉ du Cygne, et plus de 2000 fois pour α du Centaure.

Considérons, en effet, le plan du maximum des aires, perpendiculaire au moment de rotation résultant du système. Parallèlement à ce plan il y a (pour ainsi dire par définition) une légère prépondérance de molécules tournant dans un certain sens, tandis que parallèlement à un plan perpendiculaire à celui-là, cette prépondérance n'existe pas. Les chances de chocs seront donc moins nombreuses dans le plan équatorial du maximum des aires, où le mouvement est un peu orienté, que dans un plan méridien, où les mouvements se font indifféremment dans tous les sens. Il en résulte évidemment une tendance du sphéroïde à s'aplatir suivant la perpendiculaire au plan du maximum des aires.

71. Montrons que cet aplatissement, une fois commencé, va s'accentuer. Assimilons la nébuleuse aplatie à un ellipsoïde homogène. A l'intérieur d'un tel ellipsoïde, l'attraction au point x, y, z a pour composantes

$$-\alpha^2 x, \qquad -\beta^2 y, \qquad -\gamma^2 z,$$

α^2, β^2, γ^2 étant trois constantes [1]. La trajectoire d'une molécule quelconque sera définie par les équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \gamma^2 z = 0, \end{cases}$$

dont les intégrales générales sont

$$\begin{aligned} x &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t, \\ y &= A_1 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t, \\ z &= A_2 \cos \gamma t + B_2 \sin \gamma t. \end{aligned}$$

La trajectoire donne donc, en projection sur chaque axe, un mouvement pendulaire simple, mais les périodes de ces trois mouvements pendulaires ne sont pas égales. On aura donc dans l'espace une courbe analogue aux courbes connues, dans le plan, sous le nom de courbes de Lissajous.

---

(1) Les axes de coordonnées sont les axes principaux de l'ellipsoïde ; α^2, β^2, γ^2 sont les trois constantes que nous avons appelées P, Q, R au Chap. III, Section VII (p. 55).

Dans le cas actuel les trois constantes α, β, γ varient lentement avec le temps, puisque l'ellipsoïde commence par s'aplatir. Nous sommes donc en présence d'une question analogue à celle qui a été étudiée au Chapitre précédent (nº **64**, p. 75). Si nous posons

$$H(x, t) = \frac{\alpha^2 x^2}{2},$$

la première équation (1) s'écrit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dH}{dx} = 0.$$

Si H ne dépendait pas de t, cette équation multipliée par $\frac{dx}{dt}$ et intégrée donnerait l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + H = T,$$

où T serait une constante. Ici, où H varie lentement avec t, nous *posons* cette même équation, qui servira de définition à T. La dérivée de T par rapport au temps est alors

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{x^2}{2}\frac{d(\alpha^2)}{dt}.$$

Pendant une oscillation $\frac{d(\alpha^2)}{dt}$ peut être regardé comme constant, et x^2 a pour valeur moyenne $\frac{x_0^2}{2}$, x_0 désignant l'élongation maxima ; on a donc pour la valeur moyenne de $\frac{dT}{dt}$ pendant une oscillation

$$(2) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{x_0^2}{4}\frac{d(\alpha^2)}{dt}.$$

D'autre part, $\frac{dx}{dt}$ s'annulant pour $x = x_0$, la constante des forces vives T a pour valeur

$$T = H_0 = \frac{\alpha^2 x_0^2}{2},$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}\frac{d(x_0^2)}{dt} + \frac{x_0^2}{2}\frac{d(\alpha^2)}{dt}.$$

La comparaison des équations (2) et (3) donne

$$\frac{\alpha^2}{2}\frac{d(x_0^2)}{dt} + \frac{x_0^2}{4}\frac{d(\alpha^2)}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha \frac{d(x_0^2)}{dt} + x_0^2 \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

ou encore

$$x_0^2 \alpha = \text{const.}$$

Donc, quand α augmente, l'amplitude des oscillations parallèlement à l'axe des x diminue. Or, quand l'ellipsoïde, en gardant la même masse, s'aplatit suivant l'axe des x, α augmente visiblement. En réalité, dans le cas actuel, α, β et γ vont tous trois en augmentant, mais c'est α qui augmente le plus vite si l'axe des x est perpendiculaire au plan du maximum des aires. L'aplatissement commencé s'accentuera donc de plus en plus.

72. C'est ainsi que M. du Ligondès rend compte du double fait d'une condensation centrale et d'une tendance à l'aplatissement; le noyau central donnera le Soleil, et les matériaux extérieurs formeront autour de lui une sorte de disque lenticulaire équatorial qui, s'aplatissant de plus en plus, deviendra lui-même instable : ce disque pourra se résoudre finalement en anneaux qui se transformeront en planètes.

Nous avons ainsi expliqué la tendance des trajectoires à s'orienter parallèlement au plan équatorial du maximum des aires. Mais pourquoi les trajectoires des différents projectiles tendent-elles à devenir et à rester circulaires ? Lorsqu'un projectile en heurte un autre, il y a perte de force vive se traduisant par une diminution du grand axe de l'orbite de ce projectile. Cette diminution du grand axe est-elle accompagnée d'une diminution ou d'une augmentation de l'excentricité ? Pour nous en rendre compte, supposons qu'un de nos projectiles soit très gros (ce sera, si l'on veut, une planète déjà presque formée), les autres étant relativement petits : le gros projectile subira alors, du fait de ses chocs contre tous les petits, un effet analogue à celui d'une *résistance de milieu*. Or, nous verrons au Chapitre suivant qu'une résistance de milieu a en général pour effet de diminuer l'excentricité de l'orbite de la planète qui la subit, c'est-à-dire de rapprocher cette orbite de la forme circulaire.

73. Si l'on compare la conception de M. du Ligondès à la théorie cinétique des gaz, on ne peut s'empêcher de remarquer un contraste

frappant. M. du Ligondès remplit l'espace de projectiles qui le sillonnent en tous sens. Les chocs de ces projectiles produisent l'évolution du chaos, sa transformation en un système planétaire bien ordonné. Dans la théorie cinétique, les molécules des gaz sont de même assimilées à des boulets se croisant dans toutes les directions, mais leurs chocs, au lieu d'amener une différentiation, produisent au contraire l'homogénéité parfaite de la masse gazeuse. Nous sommes donc, semble-t-il, devant un paradoxe [1], puisque des prémisses en apparence identiques conduisent, ici et là, à des conséquences diamétralement opposées. En réalité, dans les deux cas, le second principe de la Thermodynamique (Principe de Carnot-Clausius, ou de dégradation de l'énergie) trouve son application, mais de deux façons différentes. En effet, les prémisses, quoi qu'il paraisse tout d'abord, ne sont nullement les mêmes : les projectiles de la théorie des gaz sont supposés *parfaitement élastiques*, tandis que les projectiles cosmiques de M. du Ligondès sont plutôt *mous*. Aussi, au moment du choc, deux molécules gazeuses rebondissent l'une sur l'autre comme deux balles élastiques, *sans perte de force vive* ; tandis que deux projectiles cosmiques qui se heurtent se collent ensemble avec dégagement de chaleur, et par suite *avec perte de force vive*. Différence de nature des projectiles, voilà la vraie cause de l'apparent paradoxe que nous signalions.

Mais il convient d'insister et de pousser plus loin ce parallèle entre la théorie cinétique des gaz et la Cosmogonie de M. du Ligondès.

74. *Théorème du viriel.* — Considérons un système mécanique formé d'un grand nombre de points matériels. Soient m la masse de l'un d'eux, x, y, z ses coordonnées, X, Y, Z les composantes de la force qui agit sur lui. On a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

[1] Nous avons déjà signalé ce point, à propos de l'hypothèse de Kant (Ch. I, n° **1**, p. 2).

Posons

$$U = \sum m\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)$$

et

$$V = \sum m(xX + yY + zZ),$$

les sommes $\sum$ s'étendant à toutes les molécules. La quantité V s'appelle le *viriel* du système.

Calculons $\frac{dU}{dt}$:

$$\frac{dU}{dt} = \sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \sum m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

La première somme $\sum$ n'est autre que la force vive 2T, la seconde somme n'est autre que le viriel V. On a donc

$$(4) \qquad \frac{dU}{dt} = 2T + V.$$

Supposons que tous les points restent à distance finie et que leurs vitesses restent aussi finies : dans ce cas U sera toujours fini. Prenant les valeurs moyennes des deux membres de l'équation (4) pendant un intervalle de temps très long $t_0 - t_1$, il vient

$$\frac{1}{t_1 - t_0}(U_1 - U_0) = \text{moyenne de } (2T + V).$$

Or, U_1, U_0, valeurs de U aux époques t_1, t_0, sont finies, et $t_1 - t_0$ est aussi grand qu'on le veut. On peut donc dire que pendant un temps très long la valeur moyenne du second membre est nulle : ce que nous écrivons, en surmontant les lettres d'un trait pour indiquer qu'il s'agit de valeurs moyennes,

$$(5) \qquad 2\overline{T} + \overline{V} = 0.$$

Tel est le théorème du viriel.

75. Faisons d'abord l'application de ce théorème à un gaz renfermé dans un vase. Étant données deux molécules gazeuses m_1 et m_2, leur viriel a pour expression

$$(x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1) + (x_2X_2 + y_2Y_2 + z_2Z_2).$$

Quelles sont les forces X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 appliquées à ces deux molécules? Nous pouvons négliger les actions mutuelles des molécules, sauf aux moments des chocs, d'ailleurs au moment d'un choc on a

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2,$$

puisque les deux molécules sont au contact; et d'autre part

$$X_1 + X_2 = 0, \qquad Y_1 + Y_2 = 0, \qquad Z_1 + Z_2 = 0,$$

puisque la réaction est égale et opposée à l'action. Le viriel dû aux chocs des molécules entre elles est donc nul, au moins en première approximation [1].

Mais il faut tenir compte aussi des chocs des molécules contre les parois du vase : à ces chocs est due la pression p du gaz. La force exercée sur un élément $d\omega$ de surface dont la normale extérieure fait avec les axes les angles α, β, γ a pour composantes

$$-p\cos\alpha\,d\omega, \qquad -p\cos\beta\,d\omega, \qquad -p\cos\gamma\,d\omega.$$

Le viriel $\overline{V}$ dû aux chocs contre la paroi a donc pour expression

$$\overline{V} = -p\iint(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface. Or, on a

$$\iint x\cos\alpha\,d\omega = \iint y\cos\beta\,d\omega = \iint z\cos\gamma\,d\omega = v,$$

v désignant le volume total du vase; par suite

$$\overline{V} = -3pv,$$

et l'équation (5) du viriel donne

$$3pv = 2\overline{T}.$$

Cette relation, due à Clausius, traduit la loi de Mariotte et Gay-

[1] Si, passant à une seconde approximation, on tenait compte, avec van der Waals, des dimensions finies des sphères d'action des molécules, on trouverait, au lieu de la formule de Mariotte et Gay-Lussac sur laquelle nous tombons plus loin, une formule plus approchée. Nous n'en avons pas besoin ici.

Lussac, car la force vive moyenne $2\overline{T}$ est proportionnelle à la température absolue du gaz.

76. Appliquons maintenant le théorème du viriel à la nébuleuse chaotique de M. du Ligondès. Ici nous n'avons plus de parois, mais nous ne pouvons plus négliger l'attraction mutuelle des projectiles. Appelant r la distance de deux masses m_i et m_k, nous désignons par

$$W = \sum_{ik} m_i m_k \varphi(r)$$

la fonction des forces. Calculons le viriel : la force (X_i, Y_i, Z_i) qui s'exerce sur m_i par suite de l'action de m_k a pour composante suivant l'axe des x

$$X_i = m_i m_k \varphi'(r) \frac{x_i - x_k}{r};$$

la masse m_i fournit donc, dans le viriel, le terme

$$X_i x_i = m_i m_k \varphi'(r) \frac{x_i - x_k}{r} x_i.$$

La masse m_k fournit de même le terme

$$X_k x_k = m_i m_k \varphi'(r) \frac{x_k - x_i}{r} x_k.$$

La somme de ces deux termes est

$$m_i m_k \varphi'(r) \frac{(x_i - x_k)^2}{r}.$$

Nous voyons aisément que le viriel total a pour valeur

$$\begin{aligned} V &= \sum_{ik} m_i m_k \varphi'(r) \frac{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}{r} \\ &= \sum_{ik} m_i m_k \varphi'(r) r. \end{aligned}$$

Dans le cas de l'attraction newtonienne, nous avons

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

et

$$\varphi'(r) r = -\frac{1}{r};$$

par suite

$$V = -\sum_{ik} m_i m_k \frac{1}{r}$$

$$= -W.$$

L'équation du viriel donne donc

$$2\overline{T} - \overline{W} = 0.$$

D'ailleurs, nous pouvons écrire aussi l'équation des forces vives

$$\overline{T} - \overline{W} = C,$$

C restant constant *tant qu'il n'y a pas de choc*. De ces deux dernières égalités nous tirons

$$\overline{T} = -C,$$

$$\overline{W} = -2C.$$

Que pouvons-nous conclure de là ? Supposons tout d'abord que les projectiles soient parfaitement élastiques : leurs chocs n'entraînent aucune perte de force vive, et C reste constant malgré ces chocs. Alors les valeurs moyennes de T et de W sont aussi constantes. Or,

$$W = \sum_{ik} \frac{m_i m_k}{r}$$

augmente avec la concentration : il n'y aura donc pas tendance à la formation d'un noyau central très condensé. Ce seraient là les conditions d'une masse gazeuse entièrement isolée dans l'espace : cette masse ne se concentre pas indéfiniment, elle admet un certain état final d'équilibre, auquel elle tend d'elle-même à revenir si elle s'en est écartée accidentellement. S'il se produit en un point une petite condensation anormale, elle tend à disparaître d'elle-même.

Au contraire, si les projectiles ont une certaine mollesse — et c'est le cas pour les matériaux cosmiques de M. du Ligondès — la constante des forces vives C *décroît* à chacun des chocs, par suite

$$\overline{W} = -2C$$

croîtra sans cesse : c'est dire que les distances r décroîtront en

moyenne, et par suite que les chocs provoquent une tendance à la concentration indéfinie [1].

77. *Loi de répartition des vitesses.* — Avant de donner la loi de Maxwell sur la répartition des vitesses des molécules gazeuses dans la théorie cinétique, exposons quelques considérations préliminaires.

Envisageons un liquide enfermé dans un vase de forme invariable qu'il remplit complètement. Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule liquide, X, Y, Z les composantes de sa vitesse, de telle façon que les équations différentielles des trajectoires des molécules s'écrivent

$$(6)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt.$$

X, Y, Z sont, par hypothèse, des fonctions données de x, y, z et t. Dans ce qui suit, le mouvement sera supposé permanent, en sorte que X, Y, Z ne dépendront que de x, y, z. Comme le liquide est incompressible, on aura

$$(7)\qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Nous supposerons que le liquide est un mélange de deux autres liquides : un liquide blanc et un liquide rose, par exemple. Si, au début, ces deux liquides ne sont pas mélangés, on prévoit facilement qu'en général les brassages dus aux mouvements des molécules liquides auront pour effet de les mêler et de rendre finalement la masse homogène.

Parmi les molécules liquides distinguons-en un certain nombre (par exemple les molécules du liquide rose), et considérons leur distribution à une certaine époque t à l'intérieur du vase. Appelons ρ la densité du liquide rose [2] au voisinage du point quelconque x, y, z :

---

[1] Remarquons de plus ce fait curieux : l'énergie cinétique moyenne T va aussi en augmentant ; les chocs ont pour effet d'*augmenter les vitesses*. Ce fait est à comparer au suivant que nous rencontrerons au Chapitre prochain : une *résistance de milieu* a pour effet d'accroître la vitesse linéaire d'une planète ou d'une comète. Nous aurons aussi plus loin (Ch. VIII, n° **171**) l'occasion de constater un autre paradoxe du même genre.

[2] ρ sera le rapport du nombre des molécules roses au nombre total des molécules comprises dans un petit volume entourant le point x, y, z.

nous conviendrons de dire que

$$\rho \, dx \, dy \, dz$$

est proportionnel à la probabilité pour qu'à l'époque t une molécule rose soit intérieure au petit élément de volume $dx \, dy \, dz$. La probabilité pour qu'à l'époque t une molécule rose soit intérieure à un certain volume fini sera de même, par définition, proportionnelle à l'intégrale

$$\iiint \rho \, dx \, dy \, dz$$

étendue à ce volume.

Soit $\psi(x, y, z)$ une fonction quelconque. La valeur moyenne de cette fonction à l'instant t pour les molécules roses sera par définition

$$\frac{1}{V} \iiint \rho \psi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

V désignant le volume total du vase, et l'intégrale étant étendue à tout ce volume. Cette intégrale mesure, si l'on veut, l'espérance mathématique d'un joueur à qui l'on aurait promis une somme $\psi(x, y, z)$ chaque fois qu'une molécule rose sera intérieure au volume $dx \, dy \, dz$.

Au lieu de considérer l'ensemble des molécules roses à une certaine époque, on pourrait, si on le préférait, considérer une molécule déterminée et la suivre dans son mouvement pendant un temps très long T. La probabilité pour que cette molécule rose soit intérieure à un volume v serait alors, par définition, le rapport à T du temps pendant lequel la molécule envisagée a été intérieure à ce volume. De même, la valeur moyenne d'une fonction ψ serait définie comme étant la moyenne, pendant ce temps très long, des valeurs que donnent à $\psi(x, y, z)$ les coordonnées de la molécule en question.

Les mouvements des molécules liquides, définis par les équations (6), auront en général pour effet de faire tendre le liquide, au bout d'un temps suffisamment long, vers un état limite *permanent*. Dans cet état final la densité ρ du liquide rose devenue indépendante de t, comme le sont X, Y, Z, ne dépendra plus que de x, y, z. Quelle sera cette distribution finale permanente des densités ρ? Écrivons l'équation de continuité relative au liquide rose

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho X)}{dx} + \frac{d(\rho Y)}{dy} + \frac{d(\rho Z)}{dz} = 0;$$

dans l'état final permanent, la dérivée partielle $\frac{d\rho}{dt}$ sera nulle ; et cette équation se réduira, en vertu de l'équation (7), à

$$X\frac{d\rho}{dx}+Y\frac{d\rho}{dy}+Z\frac{d\rho}{dz}=0.$$

Cette équation s'interprète facilement : d'après les équations (6), X, Y, Z sont proportionnels aux composantes dx, dy, dz du déplacement élémentaire de la molécule ; on a donc

$$\frac{d\rho}{dx}dx+\frac{d\rho}{dy}dy+\frac{d\rho}{dz}dz=0.$$

Cette équation signifie que, *quand l'état permanent est atteint, ρ ne varie pas tout le long de la trajectoire d'une molécule quelconque.*

Si donc une trajectoire quelconque *remplit* le vase tout entier [1], l'état final permanent donnera

$$\rho=\text{const.}$$

dans tout le vase ; c'est-à-dire que le mouvement aura eu pour résultat le mélange complet des deux liquides. C'est le cas le plus général.

Mais il peut arriver que les équations données (6) admettent une intégrale première

$$J(x, y, z)=\text{const.}$$

Cette équation représente une famille de surfaces, et une trajectoire quelconque est alors située tout entière sur une telle surface. Si elle remplit cette surface, la densité ρ sera constante sur cette surface et la distribution finale des densités sera représentée par

$$\rho=f(J),$$

f étant une fonction quelconque.

De même, si les équations (6) admettent deux intégrales

$$J_1(x, y, z)=\text{const.},\qquad J_2(x, y, z)=\text{const.},$$

[1] C'est ce qui arrive, par exemple, pour une courbe de Lissajous analogue à celles que nous avons considérées au n° **71** (p. 87), et qui emplit tout un parallélépipède si les trois constantes α, β, γ du n° **71** ne sont pas commensurables entre elles.

on aura comme loi finale de distribution des densités

$$\rho = f(J_1, J_2).$$

78. Après ces préliminaires, envisageons un système mécanique (S) à n degrés de liberté. Sa situation à l'époque t est définie par n paramètres

$$q_1, q_2, \dots q_n.$$

Son énergie potentielle U est une fonction de ces variables q_i. Sa force vive 2T est une fonction des q_i et de leurs dérivées q_i' par rapport au temps. Si nous posons

$$\frac{dT}{dq_i'} = p_i,$$

nous aurons, pour définir le mouvement du système, les $2n$ équations différentielles suivantes (équations canoniques de HAMILTON) :

$$(8) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dE}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dE}{dq_i},$$

où $E = T + U$ représente l'énergie totale du système, fonction des q_i et des p_i. Posant pour abréger

$$\frac{dE}{dp_i} = Q_i, \qquad -\frac{dE}{dq_i} = P_i,$$

les équations (8) s'écrivent

$$(9) \qquad \frac{dq_i}{Q_i} = \frac{dp_i}{P_i} = dt.$$

Elles sont de la même forme que les équations (6), les P_i et les Q_i étant indépendants de t. De plus, les P_i et les Q_i satisfont évidemment à l'équation

$$(10) \qquad \sum \frac{dQ_i}{dq_i} + \sum \frac{dP_i}{dp_i} = 0,$$

de même forme que l'équation d'incompressibilité (7).

Si donc nous considérons

$$q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

comme les coordonnées, dans un espace à $2n$ dimensions, d'une particule matérielle Π, dont la vitesse aurait pour composantes

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n,$$

nous pourrons dire que les équations (9) sont les équations différentielles de la trajectoire de la particule Π.

Dans cet espace à $2n$ dimensions, considérons fictivement un vase complètement rempli par un liquide incompressible, les molécules de ce liquide se mouvant conformément aux équations (9). Comme les composantes de la vitesse de la particule Π satisfont à l'équation (10) d'incompressibilité, nous pouvons considérer cette particule Π comme étant *en suspension* dans un pareil liquide fictif qui l'entraîne dans son mouvement.

Ainsi, au mouvement de notre système mécanique (S), nous faisons correspondre, dans l'espace à $2n$ dimensions, la trajectoire d'une particule Π en suspension dans un fluide incompressible.

Si, au lieu d'un seul système mécanique (S), nous en considérons un très grand nombre

$$(S_1), (S_2), \ldots, (S_m),$$

obéissant aux mêmes équations (9) de mouvement, mais différant entre eux par les conditions initiales, au lieu d'une seule particule Π, nous aurons à en considérer m

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m,$$

toutes en suspension dans le même liquide incompressible. Ces particules Π vont jouer ici le rôle des molécules roses que nous considérions un peu plus haut.

Définissons la probabilité pour qu'à un instant donné t, un de nos systèmes pris au hasard parmi nos m systèmes satisfasse à certaines conditions, par exemple pour que sa particule représentative Π soit intérieure à un certain volume v de l'espace à $2n$ dimensions. Si, à cette époque t, la densité des particules Π est représentée par ρ [1], la

[1] La densité ρ est proportionnelle au nombre de particules Π intérieures à l'unité de volume, au voisinage du point considéré.

probabilité en question sera, par définition, proportionnelle à l'intégrale $2n$ uple

$$\iint \cdots \int \rho\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$$

étendue à ce volume v.

Soit $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une fonction quelconque. Sa valeur moyenne, à l'instant t, pour les particules Π sera, par définition,

$$\frac{1}{V}\iint \cdots \int \rho\psi\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n,$$

V désignant le volume total du vase dans l'espace à $2n$ dimensions et l'intégrale étant étendue à tout ce volume.

Au lieu de considérer simultanément les m systèmes

$$(S_1), (S_2), \ldots, (S_m),$$

on pourrait, si on le préférait, considérer seulement l'un d'entre eux, et le suivre dans son mouvement pendant un temps très long T, entre les époques t_0 et $t_0 + T$. La probabilité pour que ce système satisfasse à certaines conditions serait alors, par définition, le rapport à T du temps pendant lequel il a satisfait à ces conditions entre les époques t_0 et $t_0 + T$. On définirait de même la valeur moyenne d'une fonction $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ comme étant la moyenne, pendant ce temps très long T, des valeurs que donnent à ψ les coordonnées de la particule Π représentative du système.

Le liquide fictif de l'espace à $2n$ dimensions va, en général, quelles que soient les conditions initiales, par suite des mouvements intérieurs définis par les équations (9), tendre vers un état limite permanent, comme il arrivait précédemment dans le cas simple de trois dimensions. Le raisonnement fait dans ce cas simple (p. 97) est évidemment général et nous permet de dire qu'*une fois l'état permanent atteint, la densité ρ des particules* Π *ne variera pas tout le long de la trajectoire d'une molécule quelconque.*

Si donc une de ces trajectoires emplit le vase tout entier la distribution finale des densités ρ sera

$$\rho = \text{const.}$$

dans tout le vase. Si les équations (9) de mouvement admettent une intégrale première

$$J = \text{const.}$$

cette distribution finale sera

$$\rho = f(J).$$

Si les équations (9) admettent k intégrales premières

$$J_1 = \text{const.},\ J_2 = \text{const.},\ \ldots,\ J_k = \text{const.},$$

la distribution finale sera

$$\rho = f(J_1, J_2, \ldots, J_k).$$

Toutefois cette dernière affirmation suppose implicitement que la trajectoire d'une des molécules, qui est située tout entière sur la multiplicité à $2n - k$ dimensions définie par les équations

$$J_1 = \text{const.},\ J_2 = \text{const.},\ \ldots,\ J_k = \text{const.},$$

remplit cette multiplicité. Nous *admettrons* — c'est en cela que consiste le « postulat de MAXWELL » — qu'il en est effectivement ainsi pour les systèmes que nous considérons.

79. Dans le cas qui nous occupe, les équations (8) ou (9) du mouvement admettent une intégrale, celle des forces vives

$$E = \text{const.}$$

Supposons d'abord que ce soit la seule. La loi de distribution finale des densités ρ est alors

$$\rho = f(E).$$

Supposons un instant, pour simplifier et pour avoir une représentation géométrique, que notre espace n'a que trois dimensions ; alors l'intégrale

$$E = \text{const.}$$

représente une famille de surfaces ; la loi

$$\rho = f(E)$$

nous enseigne que ρ est constant tout le long d'une telle surface, mais peut varier d'une surface à l'autre. Considérons deux surfaces

voisines E et E $+ d$E (*fig.* 17) ; les normales à E le long du contour

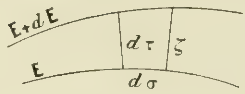


fig. 17.

d'un petit élément de surface $d\sigma$ définissent, entre ces deux surfaces, un élément de volume

$$d\tau = \zeta d\sigma,$$

ζ représentant la distance qui sépare les deux surfaces. La probabilité pour qu'une particule H soit intérieure à cet élément $d\tau$ est par définition proportionnelle à

$$\rho d\tau = \rho\zeta d\sigma,$$

de sorte que, si nous restons constamment sur la même surface E, nous pouvons dire que la *densité superficielle* le long de cette surface est représentée par

$$\rho' = \rho\zeta ;$$

elle est proportionnelle à ζ, qui visiblement est lui-même proportionnel à

$$\frac{1}{\frac{dE}{dn}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dE}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dE}{dz}\right)^2}}.$$

Restant encore dans le cas de trois dimensions, supposons maintenant que les équations de mouvement admettent deux intégrales

$$J_1 = \text{const.}, \qquad J_2 = \text{const.}$$

L'ensemble de ces deux équations représente une famille de courbes le long desquelles ρ reste constant, tout en pouvant varier d'une courbe à l'autre. Assujettissons J_1 à rester compris entre J_1^0 et $J_1^0 + dJ_1^0$, et J_2 à rester compris entre J_2^0 et $J_2^0 + dJ_2^0$. Nous définissons ainsi un petit *tube* dont nous appelons ζ la section droite. Nous pouvons alors prendre des éléments de volume

$$d\tau = \zeta d\sigma,$$

$d\sigma$ représentant ici l'élément linéaire de la courbe

$$J_1 = J_1^0, \qquad J_2 = J_2^0,$$

ce qui nous amène à définir le long de cette courbe une *densité linéaire*

$$\rho' = \rho\zeta,$$

proportionnelle à la section droite ζ du tube ; et ici l'on aura $\frac{1}{\zeta^2}$ proportionnel à

$$\left[\frac{D(J_1, J_2)}{D(y, z)}\right]^2 + \left[\frac{D(J_1, J_2)}{D(z, x)}\right]^2 + \left[\frac{D(J_1, J_2)}{D(x, y)}\right]^2.$$

Plaçons-nous à présent dans le cas général d'un espace à $2n$ dimensions, et supposons que les équations de mouvement (9) admettent k intégrales

$$J_1 = \text{const.}, \qquad J_2 = \text{const.}, \qquad \dots, \qquad J_k = \text{const.}$$

L'ensemble de ces k équations définit une famille de multiplicités à $2n - k$ dimensions, le long desquelles ρ est constant, tout en pouvant varier de l'une à l'autre. Nous pourrons encore considérer un élément $d\sigma$ d'une de ces multiplicités, et chercher une *densité fictive* ρ' correspondante : nous trouverons encore

$$\rho' = \rho\zeta,$$

$\frac{1}{\zeta^2}$ étant ici proportionnel à

$$\sum \Delta^2,$$

où les Δ sont les différents jacobiens d'ordre k qu'on peut former avec les k fonctions J et les $2n$ variables q_i et p_i.

Le résultat serait le même, et nous trouverions la même densité fictive ρ', si nous posions le problème d'une façon un peu différente. Supposons que les équations de mouvement (9), au lieu d'admettre k intégrales, en admettent seulement h

$$(11) \qquad J_1 = \text{const.}, \qquad J_2 = \text{const.}, \qquad \dots, \qquad J_h = \text{const.} ;$$

mais nous imposons à notre système l'obligation de satisfaire à $k - h$ autres conditions

$$(12) \qquad J_{h+1} = \text{const.}, \qquad J_{h+2} = \text{const.}, \qquad \dots, \qquad J_k = \text{const.},$$

que nous nous donnons arbitrairement. En d'autres termes, parmi tous les systèmes qui satisfont aux h conditions (11), nous considérons seulement ceux qui satisfont en même temps aux $k - h$ conditions (12). Et $\rho' d\sigma$ sera proportionnel à la probabilité pour qu'un système satisfaisant à la fois aux conditions (11) et (12) ait sa particule représentative II située sur l'élément $d\sigma$ de la multiplicité à $2n - k$ dimensions définie par les conditions simultanées (11) et (12).

Remarque. — Dans les cas que nous considérerons, les multiplicités à $2n - k$ dimensions que nous aurons à envisager présenteront la symétrie de sphères concentriques ou de cylindres coaxiaux, si bien que la quantité ζ sera une constante tout le long de la multiplicité envisagée, et il en sera de même de ρ'.

80. Appliquons les considérations précédentes à un système mécanique formé par un très grand nombre n de projectiles dont l'action mutuelle dépend seulement des masses et de la distance : ce système sera, si l'on veut, un gaz dont chaque molécule est assimilée à un projectile. Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées du premier projectile dont la masse sera désignée indifféremment par m_1, m_2 ou m_3. Soient de même x_4, x_5, x_6 les coordonnées du second projectile dont la masse sera désignée indifféremment par m_4, m_5 ou m_6 ... Et ainsi de suite.

Nous poserons

$$q_i = \sqrt{m_i}\, x_i$$

et

$$p_i = \sqrt{m_i}\,\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{m_i}\, x_i'.$$

L'énergie potentielle U du système sera une certaine fonction des x_i, c'est-à-dire des q_i. La demi-force vive T aura pour valeur

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m_i x_i'^2 = \frac{1}{2}\sum q_i'^2 = \frac{1}{2}\sum p_i^2.$$

Et comme on a

$$p_i = \frac{d\mathrm{T}}{dq_i'},$$

les q_i et les p_i forment un système de *variables canoniques* ; autrement

dit, on aura pour définir le mouvement les équations de HAMILTON

$$(8) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dE}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dE}{dq_i},$$

où $E = T + U$ représente l'énergie totale.

En supposant que les positions des molécules ou projectiles soient *données*, les q_i et U seront des constantes fixées une fois pour toutes. Cherchons alors une loi de probabilité pour les vitesses, c'est-à-dire pour les p_i. En d'autres termes, cherchons comment les vitesses seront distribuées en moyenne chaque fois que le système repassera par sa configuration initiale (ou par une configuration très voisine).

On conçoit que les considérations développées plus haut trouvent ici leur application. Supposons d'abord que les équations (8) n'admettent pas d'autre intégrale que celle des forces vives

$$E = \text{const.}$$

Dans l'espace à $2n$ dimensions des coordonnées q_i et p_i, nous aurons alors à considérer la multiplicité à $2n - 1$ dimensions

$$(13) \qquad E = \text{const.}$$

Mais comme on nous a imposé d'avance les positions de toutes les molécules, c'est-à-dire les q_i, il faudra que nous prenions l'intersection de cette multiplicité avec les plans

$$q_1 = \text{const.}, \qquad q_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \text{const.}$$

Cette intersection est une multiplicité M à $n - 1$ dimensions. Les q_i et U étant des constantes, l'équation (13) s'écrit simplement

$$T = \frac{1}{2} \sum p_i^2 = \text{const.} ;$$

telle est, dans l'espace à n dimensions des p_i, l'équation de notre multiplicité M à $n - 1$ dimensions.

Cette multiplicité M présente, on le voit, la symétrie d'une sphère ; par suite (d'après la remarque faite à la page 104) la quantité appelée plus haut ζ et la densité fictive ρ' sont constantes tout le long de cette multiplicité M, que nous pouvons appeler une sphère à $n - 1$ dimensions, pour faciliter le langage.

Le point

$$p_1, p_2, \dots p_n$$

représentatif des vitesses de notre système est donc situé sur cette sphère. Et comme la densité ρ'_1 à la surface de cette sphère est constante, nous pouvons dire que la probabilité, pour que ce point représentatif soit situé dans une certaine région R de cette sphère, est proportionnelle à la surface de cette région R.

Quelle est alors la probabilité pour que p_1 soit compris entre p_1^0 et $p_1^0 + dp_1^0$? Nous n'aurons qu'à prendre comme région R la zone découpée sur la sphère par les deux plans

$$p_1 = p_1^0, \qquad p_1 = p_1^0 + dp_1^0\ ;$$

et la probabilité cherchée sera proportionnelle à la surface de cette zone, surface que nous allons évaluer. Appelons r le rayon de notre sphère à $n - 1$ dimensions. Ce rayon est défini par

$$\sum p_i^2 = r^2\ ;$$

et nous posons

$$r^2 = nk^2,$$

n étant le nombre des molécules ; la constante k^2 sera alors la moyenne arithmétique de tous les p_i^2. Si nous posons

$$p_1^0 = r \cos\theta,$$

la surface de la zone en question sera proportionnelle à

$$\sin^{n-2}\theta\, d\theta,$$

c'est-à-dire à

$$\sin^{n-3}\theta\, dp_1^0.$$

Mais nous avons

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{p_1^{0^2}}{r^2}$$

$$= 1 - \frac{p_1^{0^2}}{nk^2}\ ;$$

par suite nous pouvons représenter la surface de notre zone par

$$\mathrm{A}\left(1 - \frac{p_1^{0^2}}{nk^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dp_1^0\ ;$$

cette expression représente aussi la probabilité pour que p_1 soit compris entre p_1^0 et $p_1^0 + dp_1^0$. Comme n est très grand, par hypothèse, on peut écrire approximativement ([1])

$$\left(1 - \frac{p_1^{0\,2}}{nk^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} = e^{-\frac{p_1^{0\,2}}{2k^2}},$$

ce qui donne à la probabilité la forme

$$\lambda e^{-\frac{p_1^{0\,2}}{2k^2}} dp_1^0.$$

Telle est l'expression de la loi de Maxwell sur la répartition des vitesses des molécules gazeuses ([2]).

Le point

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

étant situé sur la sphère

$$\sum p_i^2 = \text{const.},$$

et la densité fictive ρ' étant constante à la surface de cette sphère, tous les p_i^2 ont même valeur moyenne ; ce que nous écrivons

$$\overline{p_i^2} = \overline{p_1^2},$$

en surmontant les lettres d'un trait pour indiquer qu'il s'agit de valeurs moyennes. Faisant d'abord $i = 2$, p_1 et p_2 sont relatifs à une même molécule, et l'équation précédente montre que cette molécule a même force vive moyenne dans le sens des x et dans le sens des y. Si p_i et p_1 sont relatifs tous deux à l'axe des x, mais à deux molécules différentes, la même équation prouve que ces deux molécules ont, suivant une même direction, la même force vive moyenne. Donc, si

---

[1] On sait en effet que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ a pour limite e^x quand n croît indéfiniment.

[2] Si, parmi nos n molécules, il s'en trouve deux identiques, on peut les intervertir sans changer la configuration du système : les deux systèmes ainsi définis satisfont à la même loi de probabilité. S'il se trouve N molécules identiques, on peut les intervertir de N ! façons différentes : on obtient ainsi N ! systèmes satisfaisant à la même loi de probabilité. Cette loi subsiste donc même si l'on ne considère pas comme distincts ces N ! systèmes qui offrent tous la même configuration.

l'une des molécules a une masse plus grande que celle de l'autre, sa vitesse moyenne sera plus faible.

81. La démonstration précédente s'applique au cas d'un gaz enfermé dans un vase à la même température que lui. Si le gaz est entièrement libre, cette démonstration demande à être complétée. Dans ce dernier cas, en effet, les équations (8) du mouvement n'admettent pas seulement l'intégrale des forces vives qui s'écrit toujours, les q_i étant supposés donnés,

$$\sum p_i^2 = \text{const.}; \tag{14}$$

elles admettent aussi les intégrales du centre de gravité [1]. Si nous projetons la quantité de mouvement de toutes les molécules sur la direction quelconque dont ε_1, ε_2, ε_3 sont les cosinus directeurs, la somme de ces projections est une constante A. La première molécule a pour quantité de mouvement en projection sur cette direction

$$\varepsilon_1 m_1 x'_1 + \varepsilon_2 m_2 x'_2 + \varepsilon_3 m_3 x'_3 = \varepsilon_1 \sqrt{m_1}\, p_1 + \varepsilon_2 \sqrt{m_2}\, p_2 + \varepsilon_3 \sqrt{m_3}\, p_3.$$

La seconde molécule a de même pour projection de sa quantité de mouvement sur la même direction l'expression

$$\varepsilon_4 \sqrt{m_4}\, p_4 + \varepsilon_5 \sqrt{m_5}\, p_5 + \varepsilon_6 \sqrt{m_6}\, p_6,$$

où l'on a posé, pour plus de symétrie dans les notations,

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_5 = \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_6 = \varepsilon_3.$$

Et ainsi de suite. L'intégrale du mouvement du centre de gravité, en projection sur la direction envisagée, s'écrit donc

$$\sum \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, p_i = A; \tag{15}$$

dans cette égalité on a posé

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_4 = \varepsilon_7 = \ldots = \varepsilon_{3\nu-2} = \ldots,\\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_8 = \ldots = \varepsilon_{3\nu-1} = \ldots,\\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_6 = \varepsilon_9 = \ldots = \varepsilon_{3\nu} \quad = \ldots.
\end{aligned}$$

---

[1] Ces intégrales n'existaient pas dans le cas d'un gaz renfermé dans un vase, puisque les molécules étaient soumises aux réactions des parois du vase qui sont des forces *extérieures* au système.

Nous devons, dans l'espace à n dimensions, couper la sphère (14) par le plan (15) : l'intersection est une sphère à $n - 2$ dimensions dont nous appelons p_i^0 les coordonnées du centre. Pour avoir ce centre, nous abaissons de l'origine la perpendiculaire sur le plan (15) : nous obtenons les équations

$$p_i^0 = \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, k,$$

qui expriment que les p_i^0 sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan (15) ; et pour déterminer la constante k, nous écrivons que le point p_i^0 est situé dans le plan (15), ce qui donne

$$k \sum \varepsilon_i^2 m_i = \Lambda.$$

Ayant ainsi obtenu le centre de notre sphère à $n - 2$ dimensions, transportons-y l'origine en posant

$$p_i = p_i' + p_i^0.$$

La sphère (14) devient alors

$$\sum p_i'^2 + 2 \sum p_i' p_i^0 + \sum p_i^{0\,2} = \text{const.} ;$$

or, on a

$$\begin{aligned} \sum p_i' p_i^0 &= k \sum \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, p_i' \\ &= k \left[\sum \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, p_i - \sum \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, p_i^0 \right] \\ &= k [\Lambda - \Lambda] \\ &= 0 ; \end{aligned}$$

par suite, l'équation de la sphère (14) s'écrit

$$\sum p_i'^2 = \text{const.}$$

Il faut couper cette sphère par le plan diamétral (15), devenu

$$\sum \varepsilon_i \sqrt{m_i}\, p_i' = 0.$$

La multiplicité à $n - 2$ dimensions qui résulte de cette intersection présente encore la symétrie de la sphère. Un raisonnement identique à celui qui a été fait plus haut montrerait alors que la distribution des p_i' satisfait encore à la loi de MAXWELL.

Or, si l'on fait successivement

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_3 = 0,$$

puis

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 1, \qquad \varepsilon_3 = 0,$$

enfin

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_3 = 1,$$

afin d'utiliser l'ensemble des trois intégrales du centre de gravité, les p'_i ne sont autre chose, on le voit aisément, que les variables qui correspondent aux vitesses des molécules *par rapport au centre de gravité du système.*

Nous pouvons donc dire que dans une masse gazeuse entièrement libre, la distribution des vitesses relatives par rapport au centre de gravité satisfait encore à la loi de MAXWELL. En particulier, les diverses molécules auront même force vive moyenne ; si leurs masses sont inégales, les grosses molécules auront, relativement au centre de gravité, une vitesse moyenne plus faible que les petites ; plus les masses des molécules seront grandes, plus leurs vitesses se rapprocheront de celle du centre de gravité.

82. Tout ce qui précède s'applique aux gaz arrivés à un état stationnaire, et qui, par conséquent, se trouvent dans leur ensemble en état d'équilibre mécanique et thermique. Lorsqu'au contraire la masse gazeuse possède diverses régions où les vitesses et les températures ne sont pas les mêmes, le mécanisme du frottement et de la conductibilité tend à égaliser ces vitesses et ces températures, et à déterminer un état stationnaire. Considérons, en effet, deux portions contiguës A et B où les vitesses moyennes sont différentes, les molécules de B, par exemple, présentant une prépondérance de vitesses dirigées dans un certain sens. Des échanges de molécules s'effectuent entre les régions A et B, et les molécules qui passent de B en A apportent avec elles leur vitesse ; la prépondérance diminuera donc en B et la vitesse augmentera en A : c'est ainsi que le frottement ou la viscosité de la masse gazeuse tend à égaliser les vitesses de A et de B, et à rendre nulle la vitesse relative de l'une des régions par rapport à l'autre. L'ensemble de la masse gazeuse tendra donc vers un état final où elle se mouvra d'un bloc, à la façon d'un corps solide. Si le moment de rotation total était nul initialement, cet état final est une simple

translation ; si ce moment de rotation initial existait, l'état final est une translation accompagnée d'une rotation autour d'un certain axe.

Le mécanisme de la conductibilité thermique est entièrement analogue. Reprenons nos deux régions contiguës A et B et supposons la région B plus chaude que la région A. Les molécules de B auront alors une force vive moyenne supérieure à celle des molécules de A ; par suite les molécules qui passent de B en A tendent à échauffer A ; celles qui passent de A en B tendent à refroidir B. Les températures finiront donc par s'égaliser.

Toutefois, si la masse gazeuse est d'un volume considérable, elle n'arrivera à son état final stationnaire tant mécanique que thermique, qu'au bout d'un temps excessivement long [1]. Mais chaque petit volume atteindra assez rapidement un état d'équilibre local, où les vitesses des molécules satisferont à la loi de MAXWELL (il s'agit ici des vitesses relatives par rapport au centre de gravité de la région restreinte envisagée).

83. Revenons maintenant à la nébuleuse chaotique de M. DU LIGONDÈS, et voyons dans quelle mesure tout ce qui vient d'être dit sur les vitesses des molécules gazeuses dans la théorie cinétique s'applique aux projectiles qui composent cette nébuleuse. Si ces projectiles étaient parfaitement élastiques, l'assimilation serait complète. Lorsque deux projectiles élastiques de même masse, qui se sont choqués,

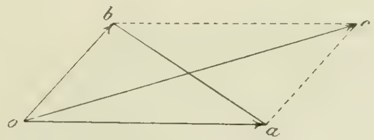


fig. 18.

rebondissent l'un sur l'autre, la vitesse de leur centre de gravité commun n'a pas changé, la force vive totale non plus ; quant à la vitesse relative de l'un par rapport à l'autre, elle n'a pas changé en grandeur, mais elle a changé en direction. En d'autres termes, si les vecteurs *oa* et *ob* représentent (*fig.* 18) les quantités de mouvement des deux projectiles avant le choc, leur somme géométrique *oc* n'a

[1] Voir ce qui a été dit au Chap. III, Section **IV**, au sujet de la faiblesse de l'influence des frottements quand il s'agit de grands volumes fluides.

pas changé ; leur différence géométrique *ab* a conservé sa grandeur mais a varié en direction. Telles sont les lois du choc de deux corps élastiques de même masse.

Considérons maintenant deux points matériels A et B de même masse s'attirant (ou se repoussant) suivant une loi quelconque fonction de la distance, l'action étant nulle à distance infinie. Quand ces deux points sont très éloignés l'un de l'autre, leurs trajectoires sont rectilignes ; elles s'incurvent (*fig.* 19) lorsque ces deux points viennent à passer l'un près de l'autre ; puis, la distance augmentant, les deux trajectoires redeviennent rectilignes. La force vive n'a pas changé ; quant à la vitesse relative, lorsque les deux points sont arrivés en A′ et en B′ où les trajectoires sont redevenues sensiblement rectilignes, elle

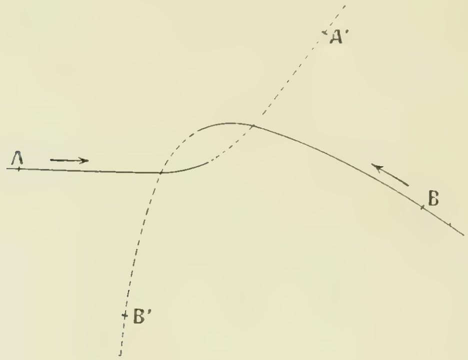


fig. 19.

n'a pas varié en grandeur, mais elle a changé en direction. Nous retrouvons donc exactement les mêmes lois que dans le choc de deux corps élastiques ; en effet, le choc de deux corps élastiques peut être regardé comme un cas particulier du problème que nous envisageons. Nous conviendrons de dire que les points matériels A et B, ainsi déviés de leur route, ont subi un *demi-choc*. Les demi-chocs se font conformément aux lois des corps élastiques.

Les matériaux qui constituent la nébuleuse de M. du Ligondès et qui s'attirent entre eux suivant la loi newtonienne vont ainsi subir un grand nombre de demi-chocs : à ce point de vue ils sont assimilables aux molécules d'une masse gazeuse. Mais, à côté des demi-chocs, il faut distinguer aussi les *chocs véritables* qui ont lieu lorsque deux

projectiles A et B viennent à se toucher physiquement. Ces chocs véritables se font toujours avec perte de force vive, et par suite avec tendance à la concentration, parce que les matériaux cosmiques ne sont pas parfaitement élastiques mais plutôt mous.

Les demi-chocs, dans la nébuleuse, sont certainement beaucoup plus fréquents que les chocs véritables. Par suite, malgré la possibilité de ceux ci, les vitesses auront tout d'abord une tendance à se répartir selon la loi de Maxwell, les projectiles les plus gros prenant une vitesse moindre que les plus petits. L'effet concentrateur des chocs véritables produira quelques grosses agglomérations. Ces grosses agglomérations, en vertu de la loi de Maxwell (que les demi-chocs tendent toujours à maintenir), prendront une vitesse relative assez faible par rapport au centre de gravité de la région où chacune d'elles se trouve. Comme la nébuleuse entière, assimilée à une masse gazeuse, tend, par suite du frottement, à tourner d'un seul bloc comme le ferait un corps solide, les grosses agglomérations tendront finalement à prendre une vitesse peu différente de celle qui correspond à une rotation uniforme autour d'un axe.

Dans ces conditions, reconnaissons que les inclinaisons des orbites des grosses agglomérations sur le plan équatorial vont tendre à diminuer. Soient O le centre de la nébuleuse, Π le plan équatorial du maximum des aires et V la vitesse actuelle d'une grosse agglomération P (*fig.* 20). Cette vitesse tend à se rapprocher de la vitesse V′ qui cor-

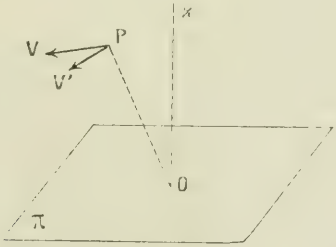


fig. 20.

respondrait à une rotation uniforme autour d'un axe Oz perpendiculaire au plan Π. Or il est manifeste que le plan OPV′ est moins incliné sur le plan Π que le plan OPV. Il y a donc à chaque instant tendance à la diminution de l'inclinaison de l'orbite de P, qui finira par se rapprocher du plan Π.

En même temps, l'excentricité de l'orbite tendra à diminuer. En effet, si PV est la vitesse de la grosse agglomération P en projection sur le plan équatorial (*fig.* 21), cette vitesse tend à se rapprocher de



fig. 21.

la vitesse PV' qui est perpendiculaire au rayon vecteur et qui correspond à la rotation uniforme. L'orbite ayant une fois atteint la forme circulaire, la conservera comme il a été expliqué au Chapitre précédent.

On comprend également, et pour la même raison, pourquoi les orbites des planètes sont toutes directes [1].

84. Il y a lieu ici de faire une remarque. Si les demi-chocs existaient seuls, comme ils se font conformément aux lois des corps élastiques, la nébuleuse chaotique serait alors entièrement assimilable à une masse gazeuse isolée dont la figure d'équilibre finale serait un sphéroïde très peu aplati et sans forte condensation centrale. Dans l'aplatissement et la concentration de la nébuleuse de M. du Ligondès, le rôle tout à fait essentiel est joué par les chocs véritables. Or, ceux-ci, nous l'avons dit, sont beaucoup moins fréquents que les demi-chocs. Sont-ils néanmoins assez nombreux pour qu'on puisse leur attribuer la transformation de la nébuleuse en système solaire, et n'est-il pas à craindre, au contraire, que l'effet des demi-chocs ne l'emporte? La question n'est pas tranchée et demanderait à être approfondie.

85. Cherchons maintenant pourquoi les planètes ont un mouvement de rotation direct, excepté celles qui sont les plus éloignées du Soleil. Nous pourrions encore faire intervenir l'influence des marées solaires, telle que nous l'avons expliquée au Chapitre III, Section **VI**.

Ce n'est pas ce que fait M. du Ligondès. L'intensité de la pesanteur à l'intérieur de la nébuleuse ayant varié avec le temps, depuis l'origine

---

[1] Observons que, dans l'hypothèse de M. du Ligondès, il n'est pas nécessaire de supposer que la différentiation initiale de la nébuleuse s'est faite sous forme d'anneaux : les grosses agglomérations ont pu se produire d'une façon quelconque à son intérieur.

où elle était proportionnelle à la distance au centre jusqu'à l'état final actuel où elle varie en raison inverse du carré de la distance, il admet, comme FAYE (Cf. nº **60**, p. 72), qu'il y a eu à chaque distance une *période directe* et une *période rétrograde*. La loi par laquelle il représente l'intensité de la pesanteur dans la période intermédiaire est seulement plus compliquée, mais aussi elle est plus voisine de la réalité que celle de FAYE. La période directe a duré très peu de temps pour les régions extérieures de Neptune et d'Uranus, aussi ces planètes sont-elles rétrogrades. Elle a duré beaucoup plus longtemps pour les régions des planètes intérieures, et lorsque la période rétrograde est arrivée en ces régions, il était trop tard pour changer le sens de rotation de ces planètes déjà presque complètement formées.

86. M. DU LIGONDÈS tente aussi d'expliquer certains faits particuliers offerts par le système solaire. Par exemple, Jupiter se trouve être la plus grosse des planètes, parce que le disque équatorial aplati, générateur des planètes, aurait présenté à la distance correspondant à Jupiter un maximum de densité. Il trouve aussi certaines raisons pour rendre compte des lois suivant lesquelles varient les masses des différentes planètes, leurs distances au Soleil, les inclinaisons de leurs axes...

Disons enfin que, d'après M. DU LIGONDÈS, l'ordre des planètes, rangées au point de vue de leur âge, serait le suivant : Jupiter, Neptune, Uranus, Saturne, la Terre, Mars, Vénus, Mercure.

Les considérations développées dans les nᵒˢ **85** et **86** nous paraissent avoir moins d'importance que les précédentes. On pourrait les abandonner sans renoncer aux principes fondamentaux de la théorie que nous venons d'exposer. En ce qui concerne le sens de la rotation des planètes, nous avons vu que la théorie des Marées était seule capable d'en rendre compte ; les objections faites aux idées de FAYE sur la « période directe » et la « période rétrograde » conserveraient ici leur valeur. D'autre part, il nous semble prématuré de chercher à rendre compte, par des considérations *a priori*, des lois qui lient les masses des planètes aux grands axes de leurs orbites, à la durée de leur rotation, au nombre et à la répartition de leurs satellites. Si ces considérations étaient justifiées elles devraient s'appliquer aux systèmes planétaires qui entourent toutes les étoiles, et tous ces systèmes devraient être identiques ce qui est bien peu vraisemblable.

CHAPITRE VI.

HYPOTHÈSE DE M. SEE.

87. Pour M. SEE ([1]), les planètes n'ont pas du tout été formées par des fragments de la nébuleuse solaire et la Lune ne provient pas d'un fragment de la nébuleuse terrestre. Les planètes sont, d'après lui, d'origine cosmique extérieure à la nébuleuse solaire ; ce sont des corps étrangers qui, venant à passer dans le voisinage du Soleil, ont été *captés* par lui. De même la Lune a été, à une certaine époque, captée par la Terre.

Comment s'est produit ce phénomène ? M. SEE pense qu'autrefois le Soleil était entouré d'une vaste atmosphère, et que c'est par l'effet de la résistance de milieu créée par cette atmosphère que la capture a eu lieu.

88. Etudions donc l'effet d'une résistance de milieu sur le mouvement d'une planète ([2]). Si la résistance était nulle, le mouvement serait képlérien, l'orbite serait une ellipse d'excentricité d'ailleurs quelconque. La densité du milieu résistant étant par hypothèse très faible, cette orbite variera lentement. Nous allons étudier les variations de cette orbite par la méthode de la variation des constantes.

Rappelons d'abord quelques formules du mouvement elliptique des planètes.

Appelant r le rayon vecteur et v l'anomalie vraie, l'équation de l'orbite est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \tag{1}$$

e désignant l'excentricité, et

$$p = a(1 - e^2) \tag{2}$$

([1]) T. J. J. SEE : *Researches on the Evolution of the Stellar Systems*, vol. II : *The Capture Theory of Cosmical Evolution* (Lynn, Mass., U. S. A., Thos. P. Nichols and Sons ; Paris, A. Hermann, 1910).

([2]) T. J. J. SEE : *Loc. cit.*, Ch. VII, p. 134-158.

désignant le paramètre de l'orbite elliptique dont $2a$ est le grand axe. Nous avons aussi l'équation des aires

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C,$$

la constante des aires C ayant pour valeur

$$C = \sqrt{Mp},$$

où M représente la masse du Soleil. (Nous négligeons la masse de la planète vis-à-vis de celle du Soleil.) Le moyen mouvement n est lié au demi-grand axe a par la troisième loi de Képler

$$n^2 a^3 = M. \tag{3}$$

Enfin l'équation des forces vives donne

$$T - \frac{M}{r} = -\frac{M}{2a},$$

T étant la demi-force vive.

Différentiant l'équation (1) par rapport au temps, il vient

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{C}{r^2} \\ &= \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{C}{p^2} (1 + e \cos v)^2 \\ &= \frac{C}{p} e \sin v.\end{aligned}$$

Or $\frac{dr}{dt}$ est la composante de la vitesse suivant le rayon vecteur. La composante perpendiculaire à ce rayon a pour valeur

$$\begin{aligned}r \frac{dv}{dt} &= \frac{C}{r} \\ &= \frac{C}{p} (1 + e \cos v).\end{aligned}$$

Des deux composantes de la vitesse V nous déduisons, pour le carré de cette vitesse,

$$V^2 = \frac{C^2}{p^2} (1 + 2e \cos v + e^2).$$

Si, pour abréger, nous posons

$$\rho^2 = 1 + 2e \cos v + e^2,$$

nous aurons

$$V = \frac{C}{p}\rho$$
$$= \rho\sqrt{\frac{M}{p}}.$$

Les formules ci-dessus conviennent au mouvement képlérien.

Supposons maintenant qu'il existe un milieu atmosphérique donnant une résistance R directement opposée à la vitesse et fonction de la valeur V de cette vitesse. La constante des forces vives $-\frac{M}{2a}$ subira, pendant le temps dt, une variation

$$\frac{M}{2a^2}da;$$

cette variation sera égale au travail de la résistance R, travail qui a pour valeur

$$-RVdt;$$

on a donc

$$\frac{M}{2a^2}\frac{da}{dt} = -RV$$
$$= -R\rho\sqrt{\frac{M}{p}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2R\rho a^2}{\sqrt{Mp}};$$

remplaçant M et p par leurs valeurs (2) et (3) dans cette dernière équation, on obtient

$$(4)\qquad \frac{da}{dt} = -\frac{2R\rho}{n\sqrt{1-e^2}}.$$

Voilà l'équation qui donne la variation du grand axe : le second membre est essentiellement négatif. L'effet de la résistance de milieu est donc toujours de diminuer a, et par suite, d'après l'équation (3),

d'augmenter n. La vitesse angulaire de la planète s'accélère [1] en même temps que sa distance moyenne au Soleil diminue.

Étudions, à présent, l'effet de la résistance de milieu sur l'excentricité de l'orbite.

Tout d'abord la constante des aires C aura sa dérivée $\frac{dC}{dt}$ égale au moment, par rapport au centre d'attraction, de la force perturbatrice R. Or, cette force R opposée à la vitesse a pour composantes :

suivant le rayon vecteur

$$-R\frac{\frac{dr}{dt}}{V},$$

perpendiculairement au rayon vecteur

$$-R\frac{r\frac{dv}{dt}}{V};$$

et le moment de la force R par rapport au Soleil est

$$-R\frac{r^2\frac{dv}{dt}}{V} = -R\frac{C}{V}.$$

On a donc

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{RC}{V}. \tag{5}$$

Rappelons que

$$C = \sqrt{Mp}$$
$$= M^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenant les dérivées logarithmiques des deux membres extrêmes, il vient

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{a} - \frac{2\,ede}{1 - e^2}\right).$$

(1) La formule (3) montre même que na augmente quand a diminue. D'où cette conséquence curieuse : une résistance de milieu a pour effet d'augmenter la vitesse linéaire de la planète.

Cette équation va nous permettre d'obtenir de puisque da et dC viennent d'être calculés. On trouve

$$\frac{2e}{1-e^2}\frac{de}{dt} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} - \frac{2}{C}\frac{dC}{dt},$$

équation qui s'écrit, en remplaçant $\frac{da}{dt}$ et $\frac{dC}{dt}$ par leurs valeurs (4) et (5),

$$(6) \qquad \frac{2e}{1-e^2}\frac{de}{dt} = -\frac{2R\rho}{na\sqrt{1-e^2}} + \frac{2R}{V}.$$

Transformons le second membre de cette égalité. Nous avons trouvé précédemment (p. 119)

$$V = \rho\sqrt{\frac{M}{p}}$$
$$= \rho\frac{na}{\sqrt{1-e^2}};$$

par suite ce second membre se met sous la forme

$$-\frac{2R}{na\sqrt{1-e^2}}\left[\rho - \frac{1-e^2}{\rho}\right],$$

ou encore, en nous rappelant la valeur de ρ^2, sous cette autre forme

$$-\frac{2R}{na\sqrt{1-e^4}}\,\frac{2e\cos v + 2e^2}{\rho}.$$

L'équation (6) donne donc finalement

$$(7) \qquad \frac{de}{dt} = -\frac{2R\sqrt{1-e^2}}{na\rho}(e+\cos v).$$

Telle est l'équation qui donne la variation de l'excentricité de l'orbite.

89. Les formules (4) et (7) permettent de calculer à chaque instant les variations du grand axe et de l'excentricité. Mais ici il importe seulement d'obtenir leurs variations *séculaires*, et pour cela de calculer les valeurs de da et de de pendant le temps d'une révolution complète.

Prenant pour variable indépendante l'anomalie vraie v, nous aurons

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dv} = \dfrac{da}{dt}\dfrac{dt}{dv}, \\[2ex] \dfrac{de}{dv} = \dfrac{de}{dt}\dfrac{dt}{dv}. \end{cases}$$

Or, l'équation des aires donne

$$(9) \qquad \frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{C} = \frac{p^2}{C}(1 + e\cos v)^{-2}.$$

Les formules (4), (7) et (9) permettront donc d'écrire les valeurs (8) de $\frac{da}{dv}$ et $\frac{de}{dv}$ qui, intégrées entre 0 et 2π, donneront les variations du demi-grand axe et de l'excentricité pendant une révolution.

Il y a lieu de faire certaines hypothèses sur la résistance de milieu R. Cette résistance croît avec la vitesse ; nous la supposerons proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse V. Elle varie avec la distance r au Soleil, car la densité (et par suite la résistance) de l'atmosphère de cet astre croît à mesure qu'on s'en approche ; nous admettrons que R est proportionnel à une certaine puissance (négative) de r. Bref, nous poserons

$$(10) \qquad R = hV^{\alpha} r^{-\beta},$$

h, α et β étant des constantes positives. Comme V est proportionnel à ρ, et r à $\frac{1}{1 + e\cos v}$, nous pouvons écrire la formule (10) ainsi :

$$R = k\rho^{\alpha}(1 + e\cos v)^{\beta},$$

k étant une nouvelle constante positive.

Avec ces hypothèses sur R, les valeurs (8) de $\frac{da}{dv}$ et $\frac{de}{dv}$, calculées au moyen des formules (4), (7) et (9), peuvent s'écrire

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dv} = -aH(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}\rho^{\alpha+1}(1 + e\cos v)^{\beta-2}, \\[2ex] \dfrac{de}{dv} = -H(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\rho^{\alpha-1}(1 + e\cos v)^{\beta-2}(e + \cos v) ; \end{cases}$$

où H désigne la constante positive

$$H = \frac{2p^2k}{naC} ;$$

rappelons que, dans ces valeurs (11),

$$\rho = (1 + 2e\cos v + e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour étudier les variations séculaires de a et de e, nous devons développer les seconds membres des valeurs (11) en séries trigonométriques suivant les cosinus des multiples de v, et intégrer entre $v = 0$ et $v = 2\pi$. A l'intégration tous les cosinus donneront zéro : par suite ce qui nous intéresse, ce sont les termes constants de ces développements trigonométriques et surtout le *signe* de ces termes constants.

Nous savons déjà que $\frac{da}{dv}$ est essentiellement négatif, puisque $\frac{da}{dt}$ l'est toujours. Occupons-nous donc seulement de $\frac{de}{dv}$. Nous devons développer en série trigonométrique l'expression

$$\rho^{\alpha-1}(1+e\cos v)^{\beta-2}(e+\cos v).$$

Or, si nous développons d'abord le produit des deux premiers termes, nous obtenons :

$$(12)\qquad \rho^{\alpha-1}(1+e\cos v)^{\beta-2} = A_0 + A_1\cos v + A_2\cos 2v + \ldots .$$

Nous remarquons que A_0 est essentiellement positif puisque c'est la valeur moyenne du premier membre dont les deux termes sont toujours positifs. Multipliant ensuite les deux membres de la formule (12) par $(e + \cos v)$, il vient

$$\rho^{\alpha-1}(1+e\cos v)^{\beta-2}(e+\cos v) = \left(A_0 e + \frac{A_1}{2}\right) + \ldots ,$$

les termes non écrits au second membre ayant tous leur valeur moyenne nulle.

La seconde formule (11) donne donc pour la valeur moyenne de $\frac{de}{dv}$ pendant une révolution

$$(13)\qquad \frac{de}{dv} = -H(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(A_0 e + \frac{A_1}{2}\right).$$

Reconnaissons que le second membre de l'équation (13) est, en général, négatif ; nous en conclurons que la résistance de milieu a pour effet de diminuer l'excentricité de l'orbite. Cela aura lieu en particulier toutes les fois que A_1 sera positif. Or, d'après la formule (12), on a

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2e\cos v+e^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+e\cos v)^{\beta-2}\cos v\,dv.$$

Si l'on a en même temps

$$\alpha \geqslant 1, \qquad \beta \geqslant 2,$$

A_1 sera positif, car de deux éléments de l'intégrale correspondant aux deux valeurs v et $\pi - v$ de la variable d'intégration, l'un est positif et l'autre négatif, mais l'élément positif est plus grand en valeur absolue que l'élément négatif.

D'une façon analogue, on reconnaîtrait que si les deux inégalités

$$\alpha \geqslant 1, \qquad \alpha + 2\beta \geqslant 5,$$

sont satisfaites, on aura de même $A_1 \geqslant 0$.

Si nous supposons l'excentricité e assez petite pour pouvoir négliger son carré e^2, nous trouverons des conditions plus larges. La seconde formule (11) se réduira à

$$\frac{de}{dv} = -\mathrm{H}\,[1 + (\alpha - 1)\,e \cos v + (\beta - 2)\,e \cos v]\,(e + \cos v);$$

d'où, en ne gardant que la valeur moyenne du second membre, on tire

$$\frac{de}{dv} = -\mathrm{H}\left(e + \frac{\alpha + \beta - 3}{2}\,e\right)$$
$$= -\frac{\mathrm{H}e}{2}(\alpha + \beta - 1).$$

Il suffit alors, pour que l'excentricité décroisse, que l'on ait

$$\alpha + \beta > 1.$$

Dans ce cas, même si $\beta = 0$ (c'est-à-dire si la résistance R ne varie pas avec la distance r au Soleil), il suffira que l'on ait

$$\alpha > 1,$$

c'est-à-dire que R croisse plus vite que la simple puissance de la vitesse. Or, on admet souvent, à titre d'approximation, qu'une résistance de milieu est proportionnelle au carré de la vitesse.

90. Cette diminution de l'excentricité par le fait d'une résistance de milieu aurait pu se prévoir, en gros et sans calcul, de la manière suivante. Supposons que la résistance ne se fasse sentir qu'au voisinage du périhélie P (*fig.* 22); dans ce cas, la planète subit en ce

point P une brusque diminution de vitesse, d'où résulte une diminution du grand axe. Le périhélie restant le même et l'aphélie se rapprochant, il est clair que l'excentricité décroît. Au contraire, si la résistance n'agissait qu'au moment de l'aphélie, la nouvelle orbite aurait même aphélie que l'ancienne, mais son périhélie se rappro-

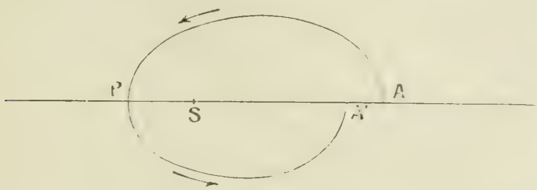


fig. 22.

cherait du Soleil : l'excentricité augmenterait. Dans la réalité la résistance se fait sentir tout le long de l'orbite, mais deux raisons font qu'elle est plus importante au périhélie : d'abord, en ce point la vitesse est maxima, puis l'atmosphère étant, en général, plus dense à mesure qu'on se rapproche du Soleil, elle oppose une plus grande résistance près du périhélie.

91. En résumé, l'effet d'une résistance de milieu sur une orbite képlérienne est de diminuer à la fois le grand axe et l'excentricité [1]. Donc, si l'on admet, avec M. See, qu'autour du Soleil s'étendait primitivement à de très grandes distances une atmosphère résistante, on conçoit qu'un astre d'origine cosmique, venant à passer dans la sphère d'action du Soleil, ait pu modifier sa trajectoire. Celle-ci, de parabolique ou hyperbolique qu'elle était, a pu d'abord devenir elliptique : puis la résistance de milieu continuant à faire décroître le grand axe et l'excentricité de l'orbite, celle-ci s'est rapprochée de la forme circulaire. Lorsque l'atmosphère résistante, peu à peu absorbée par le Soleil, a finalement disparu, l'astre a continué à circuler autour du Soleil dans son orbite voisine d'un cercle. Telle est, d'après M. See, l'histoire de toutes les planètes.

---

[1] On reconnaît aisément que cette résistance ne produit aucun effet séculaire (au moins en première approximation) sur la longitude du périhélie. Bien entendu, elle ne modifie pas le plan de l'orbite, qui garde la même inclinaison et la même ligne des nœuds par rapport à un plan fixe.

92. De même que les planètes ont été captées par le Soleil, de même, selon M. See, les satellites ont été captés par leurs planètes respectives [1].

Pour étudier cette capture, plaçons-nous dans le cas relativement simple qu'on appelle le *problème restreint*. Le Soleil S et une planète J (par exemple Jupiter) décrivent chacun (*fig*. 23) autour de

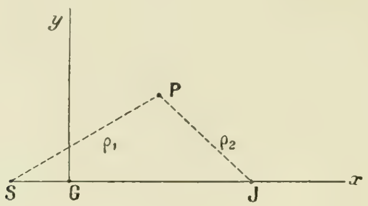


fig. 23.

leur centre de gravité commun G une orbite circulaire, avec une vitesse angulaire ω constante. Il s'agit d'étudier le mouvement d'une petite planète P dont la masse est négligeable par rapport à celle de la planète principale J et qui par conséquent ne troublera pas le mouvement de cette dernière. Prenons pour origine le centre de gravité G du système S-J, pour plan des xy le plan où S et J décrivent leurs orbites circulaires, et dans ce plan des axes rectangulaires mobiles, l'axe des x étant la droite SGJ qui joint le Soleil à Jupiter ; l'axe des z est la perpendiculaire en G au plan de l'orbite. Les forces agissant réellement sur le point $P(x, y, z)$ sont l'attraction du Soleil et celle de Jupiter. Ces deux forces dérivent respectivement des deux fonctions de forces [2]

$$U_1 = \frac{M_1}{\rho_1}, \qquad U_2 = \frac{M_2}{\rho_2},$$

M_1, M_2 étant les masses du Soleil et de Jupiter, ρ_1, ρ_2 leurs distances à P. Les axes étant mobiles, il convient d'ajouter à ces forces la force centrifuge et la force centrifuge composée. La force centrifuge a pour

(1) T. J. J. See : *Loc. cit.* Chap. VIII, p. 159-182 et Chap. X, p. 211-236.

(2) Nous supposons égale à l'unité la masse m de la petite planète P. Plus exactement, cette masse m se trouvant partout en facteur, nous ne l'écrivons pas dans les formules.

composantes

$$\omega^2 x, \qquad \omega^2 y, \qquad 0.$$

La force centrifuge composée a pour composantes

$$2\omega\frac{dy}{dt}, \qquad -2\omega\frac{dx}{dt}, \qquad 0.$$

Les équations de mouvement de la planète P relativement aux axes mobiles sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx} + \omega^2 x + 2\omega\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU_1}{dy} + \frac{dU_2}{dy} + \omega^2 y - 2\omega\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_2}{dz}.$$

Si nous multiplions respectivement ces trois équations par

$$dx = \frac{dx}{dt}dt, \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt, \qquad dz = \frac{dz}{dt}dt,$$

et que nous ajoutions les résultats, nous obtenons une combinaison immédiatement intégrable qui nous conduit à l'intégrale suivante

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - C,$$

connue sous le nom d'*intégrale de* Jacobi.

Le premier membre de cette dernière équation étant positif, les coordonnées x, y, z du point P satisferont à l'inégalité

$$\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - C > 0.$$

Par suite la projection (x, y) du point P sur le plan des xy sera intérieure à la courbe

$$\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C;$$

dans cette équation, ρ_1 et ρ_2 désignent les distances de cette projection du point P aux points S et J. Pour les très grandes valeurs de la

constante C, cette courbe comprend deux boucles (désignées par 1 sur la *fig.* 24) entourant, l'une le point S, l'autre le point J. Lorsque C décroît, ces deux boucles se dilatent et se rejoignent à un certain moment en un point double A (courbe 2). Puis, C diminuant encore, elles n'en font plus qu'une (courbe 3) qui entoure à la fois S et J [1].

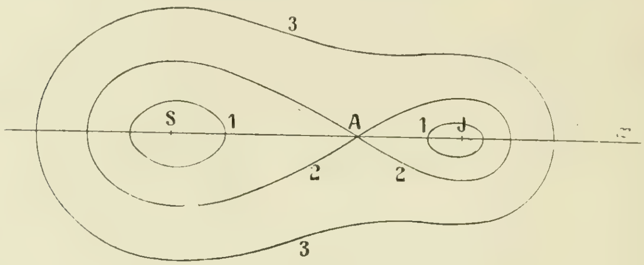


fig. 24.

Donc, lorsque la constante C n'est pas trop grande, la petite planète obligée de rester intérieure à la courbe 3 est néanmoins libre d'aller au voisinage, soit du Soleil, soit de Jupiter. Si, au contraire, la constante C est très grande, la petite planète restera à l'intérieur de l'une des deux boucles 1 : elle sera un satellite soit du Soleil, soit de Jupiter.

Or, l'effet d'une résistance passive telle qu'une résistance de milieu est d'augmenter la constante C du second membre de l'intégrale de Jacobi. Par suite, la courbe qui encercle la petite planète se rétrécit sans cesse. Si elle était initialement la courbe 3, elle deviendra à un certain moment la courbe à point double 2. Si à ce moment la planète est voisine du Soleil, jamais elle ne retournera au voisinage de Jupiter : elle est captée par le Soleil. Si, au contraire, elle est voisine de Jupiter, elle ne reviendra jamais près du Soleil : elle est captée par Jupiter dont, à partir de cet instant, elle devient un satellite.

93. La théorie de M. See rend bien compte de la faiblesse des excentricités des orbites des planètes et des satellites [2]. Mais pour-

---

(1) Nous ne nous occupons pas de certaines portions de courbes pouvant se trouver très éloignées de l'origine.

(2) La diminution de l'excentricité du fait d'une résistance de milieu n'est pas seulement capitale dans la théorie de M. See : elle intéresse aussi les théories de Faye et de M. du Ligondès.

quoi les mouvements de presque tous ces astres sont-ils directs et pourquoi leurs orbites ont-elles de faibles inclinaisons mutuelles? Ces deux questions restent, dans l'hypothèse de M. See, sans réponse bien satisfaisante. Pour essayer d'expliquer la faiblesse des inclinaisons, on peut supposer que l'atmosphère résistante du Soleil a une forme lenticulaire très aplatie : alors un astre dont l'orbite est très inclinée sur le plan de ce disque subit une résistance beaucoup moindre qu'un astre qui se meut dans le plan même du disque. Le premier astre a donc beaucoup moins de tendance à être capté que le second, et c'est surtout dans le plan du disque que se feront les captures des planètes.

On pourrait aussi supposer que le milieu résistant est lui-même en rotation : il tendrait alors, non pas à annuler la vitesse de la planète qui s'y meut, mais à imprimer à cette planète une vitesse d'un certain sens : on se retrouverait donc dans des conditions analogues à celles qui ont été étudiées au Chapitre précédent (n° **83**, p. 113 et 114). La résistance n'étant plus directement opposée à la vitesse, le plan de l'orbite pourrait varier et tendre à diminuer son inclinaison sur le plan équatorial de l'atmosphère solaire.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DE Sir G. H. DARWIN.

I. — Généralités.

94. Dans l'histoire, tant passée que future, des astres du système solaire, Sir G. H. DARWIN attribue un rôle essentiel à l'influence des marées [1].

Considérons les marées produites sur une planète T par un astre troublant L (*fig.* 25) : la planète sera, par exemple, la Terre et l'astre

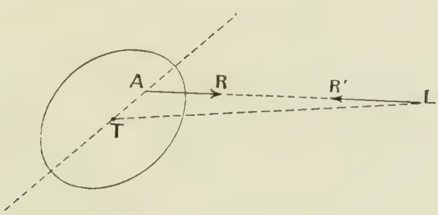


fig. 25.

troublant la Lune. Rendons-nous compte de l'action du frottement de la marée sur la rotation de la planète et de la réaction qui en résulte sur le mouvement de l'astre producteur de la marée. Si la théorie statique des marées pouvait être appliquée, la surface des océans terrestres serait un ellipsoïde allongé vers la Lune L. Mais les frottements dus à la viscosité ont pour effet de produire un décalage, un retard de la marée sur l'instant du passage de la Lune au méri-

---

(1) Les travaux de Sir G. H. DARWIN sur ce sujet forment l'objet d'une série de Mémoires publiés dans les *Philosophical Transactions* et dans les *Proceedings of the Royal Society* de 1879 à 1882. Ils se trouvent réunis dans G. H. DARWIN' *s Scientific Papers*, dont ils forment l'ensemble du Volume II intitulé *Tidal friction and Cosmogony* (Cambridge, 1908). Voir aussi C. WOLF : *Les Hypothèses Cosmogoniques*, Chap. VI, p. 75.

dien. Le grand axe de l'ellipsoïde terrestre fera donc un certain angle avec la ligne TL qui joint les centres de gravité des deux astres [1]. Par conséquent, la résultante R des attractions de la Lune sur les molécules terrestres ne passe pas par le centre de gravité T de la Terre, mais est appliquée à un certain point A : cette résultante a donc un *moment* par rapport au point T et tend, par suite, à ralentir le mouvement de rotation de la Terre.

De même, l'attraction R′ de la Terre sur la Lune n'est pas dirigée suivant le rayon vecteur LT : ce n'est plus rigoureusement une force centrale : elle a une petite composante tangentielle qui va troubler le mouvement orbital de la Lune. Cette composante tangentielle, dirigée *dans le sens même* du mouvement de la Lune sur son orbite produira évidemment un effet inverse de celui d'une résistance de milieu, cette dernière étant une force tangentielle dirigée *à l'opposé* du mouvement orbital de la Lune. Il y aura donc augmentation du grand axe de l'orbite lunaire et, conséquemment, diminution de la vitesse angulaire de révolution.

Cette augmentation du grand axe de l'orbite lunaire pouvait encore se prévoir autrement. L'effet de freinage des marées est de diminuer la vitesse angulaire de la Terre et par suite son moment de rotation. D'autre part, le moment de rotation total du système Terre-Lune doit rester constant. Donc le moment de rotation dû au mouvement orbital de la Lune doit augmenter, c'est-à-dire que la distance de la Lune à la Terre doit s'accroître.

Nous prévoyons donc dès maintenant et sans calculs que les deux principaux effets du frottement des marées sont la diminution de la rotation terrestre et l'augmentation corrélative de la distance de la Lune. En d'autres termes, la durée du jour augmentera, ainsi que celle du mois.

95. Pour expliquer l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune dont la gravitation, comme on le sait, ne paraît pas rendre entièrement compte, Delaunay avait déjà proposé d'admettre une augmentation de la durée du jour sidéral, due précisément à l'action du frottement des marées sur le fond des océans. Dans cette hypothèse, l'accélération séculaire de la Lune ne serait pas réelle ; ce

---

[1] Ici, la Lune L est regardée, pour simplifier, comme un simple point matériel sans dimensions.

ne serait qu'une apparence due à ce que notre unité de temps, le jour sidéral, augmenterait peu à peu. Bien plus, l'effet des marées, loin de produire réellement une accélération du moyen mouvement de la Lune, augmenterait au contraire la distance de cet astre à la Terre et sa période de révolution, comme nous venons de le remarquer. N'est-il pas à craindre alors que ce retard effectif ne l'emporte sur l'accélération apparente? Pour répondre à cette objection, DELAUNAY soutenait que le coefficient du retard imprimé à la Lune est moindre que celui du retard de la rotation de la Terre, ce qui se trouve être exact, semble-t-il. Mais, si l'on ne tient compte que du frottement des océans actuels sur leur fond, l'effet total est tout à fait minime et insignifiant. Il faudrait supposer que l'intérieur du globe terrestre n'est pas rigide, qu'il est plus ou moins visqueux, et que, par conséquent, les marées internes y produisent des frottements intenses.

II. — L'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire sont supposées nulles.

96. Quoi qu'il en soit, et pour en revenir au point de vue cosmogonique, on doit supposer, avec Sir G. H. DARWIN, que dans ses états antérieurs la Terre était fluide et visqueuse. Elle a alors subi des marées dans toute sa masse (*bodily tides*), et les frottements dus à ces marées internes étaient incomparablement plus énergiques que ceux qu'on peut attribuer actuellement aux marées océaniques.

97. Nous nous proposons d'étudier de plus près les variations que subissent, du fait de ces marées, la distance de la Lune et la rotation terrestre.

Pour simplifier, nous supposerons tout d'abord que le plan de l'orbite lunaire coïncide avec celui de l'équateur terrestre et que cette orbite est circulaire. Il est bien clair que, par raison de symétrie, l'orbite restera alors indéfiniment dans le plan équatorial. Mais restera-t-elle toujours circulaire? Montrons qu'il en sera bien ainsi et que, si l'excentricité est initialement nulle, elle le restera toujours. Soient F la force perturbatrice perpendiculaire au rayon vecteur [1] et

[1] L'attraction R' de la Terre sur la Lune (*fig.* 25) se décompose en : 1° une force centrale presque égale à la force entière et donnant le mouvement képlérien, et 2° une force pertubatrice F perpendiculaire au rayon vecteur.

ds le chemin parcouru par la Lune pendant le temps dt : le travail de la force perturbatrice est

$$dT = F\,ds \cos \alpha,$$

où α désigne l'angle de F avec ds. Soit $\mathfrak{M}$ le moment de rotation : sa dérivée $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$ est égale au moment de la force perturbatrice ; on a donc l'égalité

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = Fr \cos \beta,$$

où r désigne le rayon vecteur et β l'angle de F avec la perpendiculaire à ce rayon vecteur.

Dans le cas d'une orbite circulaire, $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ sont tous deux égaux à 1, et l'on a

$$ds = rn\,dt,$$

n étant le moyen mouvement. Nous tirons alors des formules précédentes

$$(1) \qquad dT = n\,d\mathfrak{M}.$$

Or, dT est la différentielle de la constante des forces vives $\left(-\frac{M}{2a}\right)$:

$$dT = d\left(-\frac{M}{2a}\right) = \frac{M\,da}{2a^2};$$

et le moment de rotation $\mathfrak{M}$ a pour valeur

$$\mathfrak{M} = \sqrt{Ma(1-e^2)};$$

M désigne la masse de l'ensemble Terre-Lune, $2a$ et e sont le grand axe et l'excentricité de l'orbite lunaire. L'équation (1) s'écrit donc

$$\frac{M\,da}{2a^2} = n\sqrt{M}\,\frac{(1-e^2)\,da - a\,d(e^2)}{2\sqrt{a(1-e^2)}}.$$

L'orbite étant supposée circulaire, nous faisons $e^2 = 0$; il vient

$$(2) \qquad \frac{M\,da}{2a^2} = n\sqrt{M}\,\frac{da}{2\sqrt{a}} - n\sqrt{M}\,\frac{\sqrt{a}}{2}\,d(e^2).$$

Or, on a

$$M = n^2a^3;$$

les termes en da se détruisent donc dans l'équation (2) qui donne alors

$$d(e^2) = 0.$$

L'excentricité ne subit donc pas de variation : nulle au début, elle restera nulle.

On pourrait faire ici une objection. Il n'est pas étonnant, dira-t-on, que $d(e^2)$ soit nul, et d'ailleurs cela ne prouve rien ; en effet

$$d(e^2) = 2e\,de,$$

et, pour une orbite circulaire, e est nul. Mais il est facile de reconnaître que, dans le calcul ci-dessus de $d(e^2)$ (ou pour être plus précis, de sa partie séculaire), *nous n'avons négligé que des termes en e^2*. Donc $d(e^2)$ est de l'ordre de e^2 et de est de l'ordre de e : il est par suite nul pour une orbite circulaire, et l'objection n'a pas de portée.

98. Considérons donc la Lune décrivant autour de la Terre une orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Désignons par y la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe, par Ω la vitesse de révolution de la Lune autour de la Terre, et posons

$$x = \Omega^{-\frac{1}{3}}.$$

Nous allons écrire que le moment de rotation du système est constant (principe des aires), et que l'énergie mécanique diminue par suite du frottement (principe de dégradation de l'énergie).

Soit C le moment d'inertie de la Terre autour de son axe. Le moment de rotation de la Terre est Cy et sa demi-force vive est $\frac{1}{2}Cy^2$.

Tenons compte à présent du mouvement de révolution de la Lune et de la Terre autour de leur centre de gravité commun. Le moment de rotation dû à ce mouvement est proportionnel à x, car il a pour valeur

$$\sqrt{\mathrm{M}a};$$

il est donc proportionnel à $\sqrt{a}$ qui lui-même est proportionnel à $\Omega^{-\frac{1}{3}}$, d'après l'équation

$$a^3\Omega^2 = \mathrm{M},$$

et la constante des forces vives $\left(-\frac{M}{2a}\right)$ est proportionnelle à $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{x^2}$.

Nous choisirons les unités de façon à simplifier les coefficients de proportionnalité. Nous prendrons tout d'abord les unités de masse et de longueur de manière que $C = 1$. Ensuite nous choisirons l'unité de temps de telle sorte que, pour $\Omega = 1$, le moment de rotation du système Terre-Lune dans sa révolution autour de son centre de gravité soit égal à C, c'est-à-dire à 1. Alors, le moment de rotation dû au mouvement orbital est non seulement proportionnel, mais égal à x. D'ailleurs, l'équation du viriel (n° **74**, p. 91)

$$2\overline{T} + \overline{V} = 0,$$

qui, puisque le mouvement est circulaire, s'écrit ici

$$2T + V = 0,$$

nous apprend que l'énergie totale T + V est égale à — T, c'est-à-dire à la demi-force vive changée de signe. On en conclut immédiatement qu'avec les unités choisies, la constante des forces vives, proportionnelle à $\frac{1}{x^2}$, est égale à $-\frac{1}{2x^2}$.

Pour l'ensemble du système Terre-Lune, nous avons donc le moment de rotation total

$$x + y,$$

et l'énergie totale

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2x^2}.$$

Le moment de rotation reste toujours constant : nous écrivons donc

$$x + y = h. \tag{3}$$

Quant à l'énergie, elle va constamment en diminuant, absorbée qu'elle est par le frottement qui la transforme en chaleur : si donc nous posons

$$Y = y^2 - \frac{1}{x^2},$$

Y ira toujours en décroissant.

Si nous remplaçons y par sa valeur $h - x$ tirée de l'équation (3), Y devient fonction de x. Nous obtiendrons ses maxima et ses minima en annulant $\frac{dY}{dx}$:

$$\frac{dY}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^3}$$

$$= -2y + \frac{2}{x^3}.$$

Annuler $\frac{dY}{dx}$ revient donc à écrire

$$x^3 y = 1,$$

ou encore, se rappelant la définition de x,

$$y = \Omega.$$

Ainsi, lorsque l'énergie $\frac{Y}{2}$ est maximum ou minimum, la vitesse angulaire de rotation de la Terre est égale à la vitesse angulaire de révolution de la Lune.

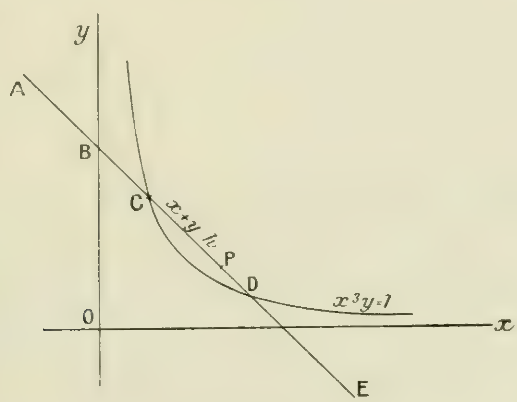


fig. 26.

99. Prenons, avec Sir G. H. Darwin, x pour abscisse et y pour ordonnée ; et traçons (*fig.* 26) la droite

(3) $$x + y = h,$$

et la courbe

(4) $$x^3 y = 1.$$

Cette courbe, Sir G. H. Darwin la nomme *courbe de rigidité*, parce que si le point représentatif (x, y) est sur cette courbe, la durée de rotation de la Terre égale la durée de révolution de la Lune, et l'ensemble Terre-Lune tourne d'un seul bloc à la façon d'un corps solide.

Deux cas sont à distinguer suivant la valeur de la constante h. Ou bien la droite (3) coupe la courbe de rigidité (4) en deux points C et D ; ou bien la droite (3) ne coupe pas la courbe (4).

Prenons d'abord le premier cas, et étudions Y en fonction de x. Nous avons

$$Y = (h - x)^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Si nous prenons x pour abscisse et Y pour ordonnée, cette équation représente une courbe telle que celle de la figure 27 : les points C′ et

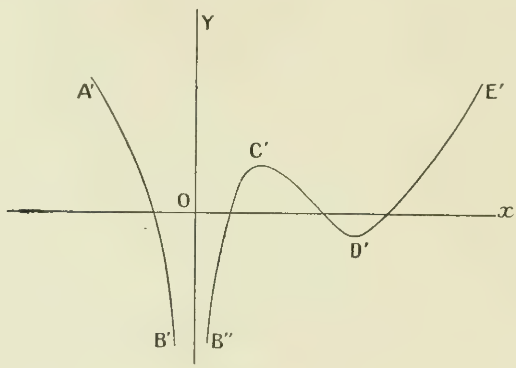


fig. 27.

D′ où Y passe par un maximum et par un minimum correspondent aux mêmes abscisses que les points C et D de la figure 26 situés sur la courbe de rigidité.

Dans le second cas, où la droite (3) ne coupe pas la courbe de rigidité (4), la fonction Y de x ne présente plus ni maximum ni minimum, et la courbe de la figure 27 est remplacée par celle de la figure 28.

Nous pouvons maintenant suivre les changements subis par le système formé par la planète et son satellite.

Supposons que l'état initial soit représenté par un point de la droite ABCDE (*fig.* 26) : alors le point représentatif (x, y) restera toujours sur cette droite, mais de telle façon que Y aille toujours en décroissant.

Si le point représentatif (x, y) initial est situé entre A et B (*fig.* 26), le point (x, Y) (*fig.* 27) est situé sur la branche A'B' et, puisque Y diminue toujours, il décrit cette branche en allant de A' vers B'. Le point (x, y) (*fig.* 26) décrit donc la portion de droite AB en avançant toujours à droite, jusqu'au point B qui représente l'état final. En ce point on a $x = 0$, c'est-à-dire $\Omega = \infty$; autrement dit, le satellite finira par tomber sur la planète. Remarquons que, dans ce cas, le satellite circule toujours autour de sa planète dans un sens inverse de celui de la rotation de celle-ci ($x < 0$, $y > 0$).

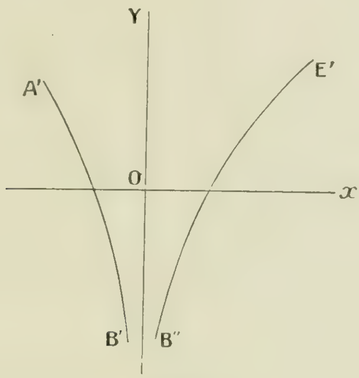


fig. 28.

Nous arriverions à une conclusion analogue — le satellite tomberait finalement sur la planète — si le point représentatif (x, y) initial était situé entre B et C, car alors le point (x, Y) (*fig.* 27) décrirait la branche de courbe C'B'' en allant toujours vers B''. Cette fois, les deux mouvements de rotation de la planète et de circulation du satellite sont de même sens ($x > 0$, $y > 0$) ; mais puisqu'on a

$$x^3 y < 1,$$

c'est-à-dire

$$y < \Omega,$$

le mouvement angulaire du satellite est plus rapide que celui de la planète : le mois est plus court que le jour.

Supposons maintenant que le point représentatif (x, y) soit entre C et D (*fig.* 26). Les deux mouvements sont alors directs ($x > 0$, $y > 0$), et le mois est plus long que le jour ($x^3 y > 1$) : c'est le cas

offert par le système Terre–Lune. Alors le point (x, y) (*fig.* 27) décrira l'arc $C'D'$ en marchant vers D' puisque y décroît. L'état final est représenté par le point D de la courbe de rigidité (*fig.* 26), pour lequel les deux durées de rotation et de révolution sont égales.

Enfin, si le point représentatif (x, y) était situé entre D et E, l'état final serait encore le point D, puisque le point (x, y) (*fig.* 27) décrirait alors la branche $E'D'$. Dans ce cas, le mois est toujours plus court que le jour ($x^3 y < 1$), le mouvement du satellite est toujours direct ($x > 0$), mais celui de la planète a pu commencer par être rétrograde ($y < 0$).

Dans le cas où la droite

$$x + y = h$$

ne couperait pas la courbe de rigidité, la figure 27 serait remplacée par la figure 28. L'état final serait toujours le point B' ou B'', c'est-à-dire que le satellite finirait toujours par tomber sur la planète.

La plupart des satellites connus correspondent au cas où les deux mouvements sont de même sens, mais avec le mois plus long que le jour : le point représentatif (x, y) est alors (*fig.* 26) entre C et D.

100. Étudions spécialement le système Terre-Lune. Pour ce système, on a les valeurs numériques suivantes

$$x = 3{,}2, \qquad y = 0{,}8, \qquad h = 4,$$

et le point représentatif se trouve dans une position telle que P. Ce point se déplace lentement vers le point D qui représente l'état final. Si, au lieu de chercher à prévoir l'avenir, nous remontons dans le passé, nous pouvons dire que le système Terre-Lune est parti de l'état initial représenté par C. Dans cet état initial, le mois égalait le jour et leur durée commune était de $5^h{,}36$. La durée du mois et celle du jour se sont mises ensuite à croître, la première plus vite que la seconde, en même temps que la Lune s'éloignait de la Terre. Lorsque l'état final D sera atteint, le mois sera redevenu égal au jour, leur durée commune étant d'environ 55 jours actuels.

Cet état final serait définitif si la Terre et la Lune existaient seules. Mais le Soleil produit aussi sur la terre des marées qui continueront à retarder sa rotation : le jour et le mois continueront donc à croître, quoique lentement, et la Lune s'éloignera de plus en plus de la Terre, qui pourra finir par perdre son satellite.

Dans l'état initial, la durée de révolution de la Lune, $5^h,36$, était courte et par suite la distance de cet astre à la Terre était faible : le calcul montre que cette distance était de $2\frac{1}{2}$ rayons terrestres. Donc, d'après les idées de Sir G. H. Darwin, la Lune aurait pris naissance tout près de la Terre, et son orbite se serait peu à peu élargie et dilatée. Nous remarquons là un contraste complet avec la théorie de Faye selon laquelle, nous l'avons vu, le satellite se formerait très loin de l'astre central, son orbite se rétrécissant peu à peu à mesure que la masse de l'astre central augmenterait par suite de la condensation.

101. Dans tout ce qui précède, nous avons regardé C, moment d'inertie de la Terre, comme constant. Or, la Terre, en se contractant par suite du refroidissement, diminue de volume et C décroît. Nous étudierons un peu plus loin l'effet qui en résulte. Cependant disons dès maintenant que, pour la Terre, cet effet paraît peu important et ne change pas beaucoup l'allure générale des phénomènes.

102. Pour le système Terre-Lune, le point représentatif actuel P (*fig.* 26) est assez voisin du point D, puisque $x = 3,2$ est sensiblement plus grand que $y = 0,8$. Par conséquent, ce système est relativement assez près de son état final.

Si nous nous occupons maintenant des systèmes formés par les autres planètes et leurs satellites, nous constatons, au contraire, que le rapport $\frac{x}{y}$ se trouve être extrêmement petit. Par conséquent, leur point représentatif, au lieu d'être voisin du point D, est voisin du point C. Ces systèmes sont donc beaucoup plus près de leur état initial que de leur état final. Cela tient à ce que, pour ces systèmes, la masse des satellites est extrêmement faible par rapport à la masse de la planète ; les marées sont donc peu importantes et n'ont pas encore eu le temps de produire un effet considérable.

Pour le système formé par le Soleil et l'ensemble des planètes, la masse des planètes est sans doute fort petite par rapport à celle du Soleil, mais les rayons de gyration sont très grands, et l'on constate que le rapport $\frac{x}{y}$ est aussi très grand. Il semble donc que ce système doive être très près de son état final. Mais cette affirmation ne supporte pas l'examen. Les planètes, en effet, produisent sur le Soleil des marées qui retardent sa rotation ; et c'est de ces marées qu'il faut

tenir compte si l'on cherche les variations de la rotation du Soleil. Mais, inversement, le Soleil produit des marées sur les planètes, et ces dernières marées sont beaucoup plus fortes que les premières : leur effet devrait donc s'être produit depuis longtemps, c'est-à-dire que les planètes devraient toujours tourner une même face vers le Soleil, ce qui n'a pas lieu.

III. — Cas général.

103. Dans l'exposé qui précède, nous avons, pour simplifier, supposé nulles l'excentricité de l'orbite lunaire et l'inclinaison de cet orbite sur le plan de l'équateur terrestre. Nous allons à présent nous affranchir de ces hypothèses et entrer dans le détail de la théorie de Sir G. H. Darwin.

Auparavant, il est nécessaire de rappeler quelques points de la théorie statique des marées [1].

Dans cette théorie statique, on suppose que la mer prend à chaque instant sa forme d'équilibre : la surface libre de l'océan est donc une surface de niveau relativement à la somme des potentiels de la gravité et de l'astre perturbateur qui produit la marée.

Le potentiel de la gravité peut se représenter par

$$V_0 - g\zeta, \tag{5}$$

V_0 désignant la valeur constante de ce potentiel au niveau moyen des mers et ζ la dénivellation de la particule liquide superficielle envisagée [2].

Le potentiel dû à l'astre perturbateur, nous le désignons par V_1. Soient m la masse de l'astre perturbateur L (qui sera, par exemple, la Lune), r sa distance à un point A de la surface de la mer (*fig.* 29). Nous avons

$$V_1 = \frac{m}{r}. \tag{6}$$

---

[1] Voir M. Levy : *Leçons sur la Théorie des Marées*, t. I, chap. I ; et H. Poincaré : *Leçons de Mécanique Céleste*, t. III, *Théorie des Marées*, chap. I et III.

[2] Dans V_0 il est tenu compte de la force centrifuge qui provient de la rotation diurne. Nous négligeons le potentiel dû à la couche d'eau comprise entre la surface moyenne et la surface vraie des mers.

Comme nous rapportons les points de la mer à des axes de coordonnées invariablement liés à la Terre, il faut, pour pouvoir regarder ces axes comme fixes, appliquer à chaque point A les forces apparentes dues à leur mouvement. Mais, puisqu'il ne s'agit ici que de l'équilibre, la force centrifuge composée n'intervient pas; il ne reste que la force d'inertie dans le mouvement d'entraînement du point A

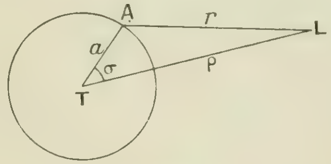


fig. 29.

avec les axes. La force provenant de la rotation diurne a déjà été prise en considération dans V_0. Il suffit donc, aux forces réelles, d'ajouter la force d'inertie due à la translation des axes, c'est-à-dire, puisque l'origine est au centre de la Terre, une force accélératrice — J égale et contraire à l'accélération J que l'astre perturbateur tend à imprimer à ce point.

Soient J_x, J_y, J_z les composantes rectangulaires de J. A chaque point A, on devra appliquer une force de composantes

$$-J_x, \quad -J_y, \quad -J_z;$$

comme ces composantes ne dépendent que du temps, et non des coordonnées x, y, z du point A, elles peuvent être considérées comme les dérivées partielles de la fonction

$$(7) \qquad -(J_x x + J_y y + J_z z) = -Ja\cos(J, a),$$

en appelant a le rayon moyen des mers, égal sensiblement à la distance du point A au centre T de la Terre, et en désignant par (J, a) l'angle de J avec le rayon TA. Finalement, en écrivant que la somme des trois expressions (5), (6) et (7) est égale à une constante, nous obtiendrons l'équation de la surface libre des océans rapportée à des axes invariablement liés à la Terre :

$$(8) \qquad V_0 - g\zeta + V_1 - Ja\cos(J, a) = \text{const.}$$

Telle est l'équation qui, dans la théorie statique, donne la dénivellation ζ. Nous allons la transformer.

104. L'accélération J que la Lune L imprime au centre de la Terre T a pour valeur $\frac{m}{\rho^2}$, et est dirigée suivant la droite $TL = \rho$. Donc l'angle (J, a) n'est autre que l'angle désigné par σ sur la figure 29 (c'est la distance zénithale géocentrique de la Lune), et l'on a

$$Ja \cos(J, a) = \frac{ma}{\rho^2} \cos \sigma.$$

Comme on a

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \sigma,$$

le potentiel V_1 dû à la Lune peut s'écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{m}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \sigma)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{m}{\rho} \left(1 - \frac{2a}{\rho} \cos \sigma + \frac{a^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{m}{\rho} + \frac{am}{\rho^2} \cos \sigma + \frac{a^2 m}{\rho^3} \frac{3 \cos^2 \sigma - 1}{2}, \end{aligned}$$

en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{a^3}{\rho^4}$. Nous écrirons

$$V_1 = U_0 + U_1 + U_2,$$

en posant

$$U_0 = \frac{m}{\rho}, \qquad U_1 = \frac{am}{\rho^2} \cos \sigma, \qquad U_2 = \frac{a^2 m}{\rho^3} \frac{3 \cos^2 \sigma - 1}{2}.$$

Par suite, nous pouvons écrire l'équation (8) ainsi

$$V_0 - g\zeta + U_0 + U_2 = \text{const.}$$

V_0 et $U_0 = \frac{m}{\rho}$ étant des constantes ne dépendant pas du point A, cette équation nous donne finalement, pour la dénivellation ζ,

$$\zeta = \frac{U_2}{g} + \text{const.} = \frac{1}{g} \frac{a^2 m}{\rho^3} \frac{3 \cos^2 \sigma - 1}{2} + \text{const.}$$

La constante du second membre se déterminerait en écrivant que le volume total de la mer est constant, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\iint \zeta \, d\sigma,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface des mers, est nulle. On reconnaît ainsi que, si la mer recouvre toute la surface de la Terre, cette constante est nulle, et l'on a alors la formule définitive de la dénivellation statique

(9) $$\zeta = \frac{U_2}{g} = \frac{1}{g} \frac{a^2 m}{\rho^3} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}.$$

105. Dans la théorie statique, on ne tient pas compte de l'inertie des eaux de la mer. Dans quelle mesure cela est-il légitime? L'inertie, proportionnelle à l'accélération, joue un rôle dans les marées *à courte période*; au contraire, pour les marées *à longue période*, l'effet de l'accélération, c'est-à-dire de l'inertie, est négligeable. Mais que doit-on entendre par longue et courte période? La période d'une marée pourra être qualifiée de longue ou de courte suivant que cette période sera ou ne sera pas très considérable *par rapport à la période d'oscillation propre* de la mer.

Par conséquent, si la période d'oscillation propre est très courte, toutes les marées, même les marées semi-diurnes, pourront être considérées comme étant à longue période, et la théorie statique s'appliquera. Or, si, avec Sir G. H. Darwin, nous considérons la Terre aux époques reculées où elle était entièrement liquide, nous trouvons que sa période propre d'oscillation est effectivement très petite par rapport à la demi-journée : il est donc légitime de se contenter de la théorie statique.

Au contraire, l'inertie jouerait un rôle important, et la théorie statique deviendrait tout à fait insuffisante, si l'on voulait étudier le mouvement des océans actuels, dont la période propre d'oscillation est de l'ordre du demi-jour.

106. Mais si, dans le calcul de l'action des marées produites par la Lune sur la Terre, nous pouvons négliger l'inertie, nous devons en revanche tenir compte de la viscosité, puisque ce sont précisément ses effets que nous voulons étudier.

Reprenons la formule de la dénivellation statique

$$(9) \qquad \zeta = \frac{U_2}{g} = \frac{1}{g}\frac{a^2 m}{\rho^3}\frac{3\cos^2\sigma - 1}{2}.$$

Le mouvement de l'astre perturbateur L étant connu en fonction du temps t, le troisième membre de cette formule peut être développé sous forme trigonométrique

$$\sum A \cos \alpha t,$$

les A étant des fonctions des coordonnées x, y, z du lieu géographique et les α étant des constantes. Nous envisagerons séparément chacun des termes de la somme $\sum$ et, pour tenir compte de la viscosité, nous ajouterons au second membre de l'équation qui donne ζ un terme négatif proportionnel à $\frac{d\zeta}{dt}$. L'équation en ζ prend ainsi la forme

$$\zeta = A \cos \alpha t - k\frac{d\zeta}{dt},$$

ou encore

$$(10) \qquad k\frac{d\zeta}{dt} + \zeta = A \cos \alpha t,$$

k étant une constante proportionnelle à la viscosité du liquide.

Pour intégrer cette équation linéaire à second membre, nous considérerons l'équation suivante :

$$(11) \qquad k\frac{d\zeta}{dt} + \zeta = Ae^{i\alpha t},$$

où i désigne l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et nous ne conserverons que la partie réelle de sa solution. Cette solution est de la forme

$$\zeta = Ce^{i\alpha t};$$

en la substituant dans l'équation (11), il vient pour déterminer C, l'équation

$$C(1 + ik\alpha) = A.$$

Posant

$$(12) \qquad k\alpha = \operatorname{tg} \varepsilon,$$

on aura

$$1 + ik\alpha = 1 + i\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{e^{i\varepsilon}}{\cos\varepsilon};$$

par suite

$$C = A\cos\varepsilon\, e^{-i\varepsilon}.$$

Et l'intégrale de l'équation (11) est

$$\zeta = A\cos\varepsilon\, e^{i(\alpha t - \varepsilon)},$$

dont la partie réelle

$$\zeta = A\cos\varepsilon\cos(\alpha t - \varepsilon)$$

est l'intégrale cherchée de l'équation (10).

Nous voyons donc que l'effet de la viscosité est d'abord de réduire l'amplitude de la marée dans le rapport de $\cos\varepsilon$ à 1, ensuite d'amener pour la marée un retard de phase, un *décalage*, égal à ε.

Si l'astre sur lequel se produit la marée, au lieu d'être liquide et visqueux, était solide et parfaitement élastique, nous aurions bien une réduction de l'amplitude, mais nous n'aurions pas de décalage. S'il était solide et visqueux, nous aurions à la fois une réduction de l'amplitude plus grande que $\cos\varepsilon$ et un décalage.

107. Reprenons la formule (12) qui définit ε

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = k\alpha. \tag{12}$$

Si la viscosité est très faible, c'est-à-dire si k est très petit, l'angle ε est petit, il se confond sensiblement avec sa tangente et il est proportionnel à α, c'est-à-dire à la vitesse de la marée ; de même $\sin\varepsilon$ et $\sin 2\varepsilon$ seront proportionnels à α ; quant à $\cos\varepsilon$ il sera presque égal à 1. Au contraire, si la viscosité était très forte, k serait très grand, $\mathrm{tg}\,\varepsilon$ aussi, ε serait voisin de $\frac{\pi}{2}$, et l'on aurait sensiblement

$$\mathrm{cotg}\,\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{1}{k\alpha};$$

dans ce cas, $\sin\varepsilon$ serait très sensiblement égal à 1 ; $\cos\varepsilon$, égal alors à $\mathrm{cotg}\,\varepsilon$, serait proportionnel à $\frac{1}{\alpha}$, et $\sin 2\varepsilon = 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ serait aussi proportionnel à $\frac{1}{\alpha}$.

Dans le cas actuel devons-nous considérer la viscosité comme faible ou comme forte? Nous devons la considérer comme *faible*, car une substance comme la poix nous donnerait, si nous faisions le calcul, un angle ε très petit et non voisin de $\frac{\pi}{2}$. La poix doit donc être considérée, au point de vue qui nous occupe, comme un corps à viscosité très faible, et il y a lieu d'admettre que la Terre, à l'époque où elle était liquide, n'offrait pas une viscosité incomparablement supérieure à celle de la poix.

108. Revenons à la formule de la dénivellation statique

$$(9) \qquad \zeta = \frac{U_2}{g} = \frac{1}{g}\frac{a^2 m}{\rho^3}\frac{3\cos^2\sigma - 1}{2},$$

et indiquons maintenant comment on pourrait développer effectivement son troisième membre sous forme trigonométrique.

Représentons sur une sphère le pôle boréal P, le lieu géographique A et l'astre perturbateur L, de façon à former un triangle sphérique PAL (triangle Pôle-Zénith-Astre) dont les trois côtés sont

$PA = \delta$ colatitude du lieu,
$PL = \delta'$ complément de la déclinaison de l'astre,
$LA = \sigma$ distance zénithale géocentrique de l'astre.

L'angle $APL = \mathcal{H}$ est l'angle horaire de l'astre relativement au point A où on étudie la marée. La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, appliquée au triangle sphérique PAL, nous donne l'équation suivante :

$$\cos\sigma = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos\mathcal{H},$$

d'où nous tirons

$$\cos^2\sigma = \cos^2\delta\cos^2\delta' + \sin^2\delta\sin^2\delta'\frac{1+\cos 2\mathcal{H}}{2} + 2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos\mathcal{H}.$$

Si nous portons cette valeur dans la formule (9), nous voyons que ζ contient trois sortes de termes [1] :

---

[1] ζ sera fonction du temps par l'intermédiaire de ρ, δ' et $\mathcal{H}$. Observons que les coordonnées ρ et δ' de l'astre varient très lentement, tandis que son angle horaire $\mathcal{H}$ varie vite.

1° Des termes indépendants de l'angle horaire $\mathcal{H}$: ils donneront les marées *à longue période* ;

2° Des termes en $\cos 2\mathcal{H}$ dont la période est voisine d'un demi-jour : ils donneront les marées *semi-diurnes* ;

3° Des termes en $\cos\mathcal{H}$ dont la période est voisine d'un jour : ils correspondent aux marées *diurnes*.

Introduisons les éléments osculateurs de l'orbite de l'astre L. Soient, sur la sphère céleste (*fig.* 30), E le plan de l'équateur terrestre, O le plan de l'orbite de l'astre troublant L, N le nœud de l'orbite sur

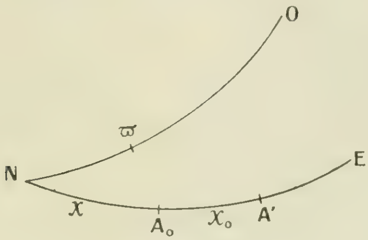


fig. 30.

l'équateur, A_0 l'origine des longitudes géographiques (intersection de l'équateur avec le méridien de Paris), A' l'intersection de l'équateur avec le méridien du lieu géographique A, ϖ le périgée de l'astre. Nous avons

$$A'A_0 = \chi_0 \qquad \text{longitude du lieu,}$$
$$A_0N = \chi \qquad \text{angle horaire du nœud à Paris.}$$

Nous désignons par ϖ l'arc $N\varpi$ égal à la longitude du périgée moins la longitude du nœud ; et par l la longitude moyenne de l'astre dans son orbite, comptée à partir du nœud N.

Alors, si nous développons le troisième membre de la formule (9), autrement dit $\cos^2\sigma$, en série de fonctions trigonométriques dont l'argument est une fonction linéaire du temps t, nous obtiendrons des termes tels que

$$(13) \qquad M\cos(\alpha\chi + \alpha\chi_0 + \beta l + \gamma\varpi),$$

M étant une fonction des coordonnées du lieu A, et α, β, γ étant des

entiers. C'est en effet des quantités

$$\chi + \chi_0, \quad l, \quad \varpi$$

que dépendent les coordonnées horaires de l'astre ♎ et ♌.

Puisque dans l'expression (13), χ_0 ne dépend comme M que des coordonnées du lieu A, et non de l'astre, nous l'isolerons en développant le cosinus sous la forme

(14) $\cos \alpha\chi_0 \cos(\alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi) - \sin \alpha\chi_0 \sin(\alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi)$.

Et finalement les différents termes du développement trigonométrique de ζ seront de la forme

(15) $$AX \cos(\alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi + h),$$

où la constante h vaut o ou $\pm \frac{\pi}{2}$, suivant que l'on prend le cosinus ou le sinus qui figure dans la formule (14), et où nous désignons par AX le coefficient qui dépend des coordonnées du lieu géographique.

De quelle nature seront ces coefficients AX en tant que fonctions des coordonnées du lieu ? Ils seront évidemment des *fonctions sphériques du second ordre* comme l'est lui-même le troisième membre de la formule (9). Nous avons désigné chacun de ces coefficients par un produit AX : la lettre A désigne une constante numérique, et la lettre X une fonction sphérique du second ordre multipliée par un nombre convenable de telle façon que l'intégrale

$$\iint X^2 d\sigma,$$

étendue à tous les éléments de surface $d\sigma$ de la sphère, ait une *même* valeur constante K pour toutes les fonctions sphériques que nous aurons à envisager.

Soient x, y, z les coordonnées du lieu par rapport à trois axes rectangulaires invariablement liés à la Terre et passant par son centre, l'axe des z étant l'axe de rotation, le plan des xz étant le méridien de Paris. Nous aurons (en prenant pour unité le rayon terrestre a)

$$x = \sin \delta \cos \chi_0,$$
$$y = \sin \delta \sin \chi_0,$$
$$z = \cos \delta.$$

Les fonctions sphériques X qu'introduit alors le développement trigonométrique du troisième membre de la formule (9) sont les suivantes [1] :

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{\sin^2\theta}{2} \cos 2\chi_0,$$

$$xy = \frac{\sin^2\theta}{2} \sin 2\chi_0,$$

$$xz = \sin\theta \cos\theta \cos\chi_0,$$

$$yz = \sin\theta \cos\theta \sin\chi_0,$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - 3\cos^2\theta}{2\sqrt{3}}.$$

Faisons maintenant quelques remarques sur les trois entiers α, β, γ. Tout d'abord on aura

$$\alpha = 0, 1 \text{ ou } 2,$$

suivant que le terme considéré correspond à une marée à longue période, à une marée diurne, ou à une marée semi-diurne ; car, dans l'expression (15), βl et $\gamma\varpi$ ne varient que très lentement et peuvent être regardés comme sensiblement constants. Ensuite, si l'inclinaison est nulle, on aura

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

car alors les deux plans E et O (*fig.* 30) coïncident, le point N devient indéterminé, et les seuls angles qui interviennent sont $\chi - \varpi$ et $\chi - l$. Par suite, dans les termes indépendants de l'inclinaison, on aura

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Dans les termes qui contiennent l'inclinaison à la puissance λ, on verrait facilement que

$$|\alpha + \beta + \gamma|$$

---

[1] On reconnaît aisément que l'intégrale

$$\iint X^2 d\sigma$$

étendue à toute la sphère a, comme nous le désirions, la *même* valeur K pour toutes ces fonctions sphériques X.

doit être au plus égal à λ et de même parité que λ. Enfin, dans les termes indépendants de l'excentricité, ϖ n'intervient pas, on a donc

$$\gamma = 0;$$

et dans les termes qui contiennent l'excentricité à la puissance λ, on verrait que $|\gamma|$ est au plus égal à λ et de même parité que λ.

Comme nous ne conserverons dans la suite que des termes du premier ordre au plus par rapport à l'excentricité e et à l'inclinaison i, nous aurons, dans les termes indépendants de e et de i,

$$\gamma = 0, \qquad \alpha + \beta = 0;$$

dans les termes en e,

$$\gamma = \pm 1, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

dans les termes en i,

$$\gamma = 0, \qquad \alpha + \beta = \pm 1.$$

109. Bref, nous avons prouvé que le troisième membre de la formule (9), qui représente (au facteur g près) le potentiel U_2 générateur de la marée, peut se développer en une série de termes de la forme (15) :

$$\frac{U_2}{g} = \sum AX \cos(\alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi + h),$$

ce que nous écrivons simplement

$$\frac{U_2}{g} = \sum AX \cos\theta,$$

en posant pour abréger

$$\theta = \alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi + h.$$

Si nous voulons maintenant tenir compte de la viscosité comme nous l'avons fait au n° **106** (p. 146), nous trouverons que ce potentiel perturbateur U_2 produit une dénivellation

$$(16) \qquad \zeta = \sum AX \cos\varepsilon \cos(\theta - \varepsilon),$$

où ε est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varepsilon = k\frac{d\theta}{dt}.$$

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right.$ représente ici la vitesse de la marée que nous appelions α au n° **106**) (1).

Nous nous proposons de chercher l'action de la Terre, ainsi déformée par la marée (16), sur un corps extérieur. Pour fixer les idées, nous supposerons que la marée (16) est produite par le Soleil et nous chercherons les perturbations que cette marée solaire (16) fait subir au mouvement de la Lune.

Les quantités Z, l, ϖ sont donc relatives au Soleil. Nous appellerons Z', l', ϖ' les mêmes quantités relatives à la Lune. Comme nous cherchons l'action, sur l'orbite de la Lune, du bourrelet soulevé par la marée solaire à la surface de la Terre, nous introduirons une fonction perturbatrice W qui sera le potentiel dû à l'attraction de ce bourrelet.

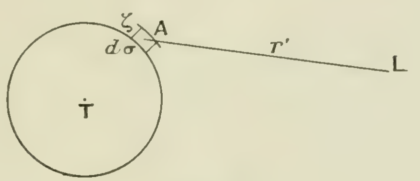


fig. 31.

Soit r' la distance de la Lune L à l'élément $\zeta d\sigma$ du bourrelet (*fig.* 31). Nous aurons alors

$$W = \iint \frac{\zeta d\sigma}{r'},$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère terrestre.

Nous pouvons développer $\frac{1}{r'}$ comme nous avons développé $\frac{1}{r}$ au n° **104** (p. 144) et écrire

$$\frac{1}{r'} = U'_0 + U'_1 + U'_2,$$

U'_0, U'_1, U'_2 étant respectivement des fonctions sphériques d'ordre 0, 1, 2, par rapport aux coordonnées du lieu géographique A.

---

(1) Rappelons que l'angle ε est très petit et peut être confondu avec sa tangente ou son sinus (n° **107**).

Comme ζ est lui-même une fonction sphérique du second ordre par rapport aux coordonnées du même point A, on a

$$\iint \zeta U'_0\,d\sigma = 0, \qquad \iint \zeta U'_1\,d\sigma = 0.$$

Nous avons donc simplement pour notre fonction perturbatrice

$$W = \iint \zeta U'_2\,d\sigma. \tag{17}$$

Développons U'_2 sous forme trigonométrique de la même manière que nous avons développé U_2 un peu plus haut : nous aurons

$$U'_2 = \sum A'X' \cos(\alpha'\chi' + \beta' l' + \gamma'\varpi' + h')$$

α', β', γ' étant trois entiers, h' étant une constante égale à 0 ou à $\pm\frac{\pi}{2}$, A' étant un coefficient numérique, et X' une fonction sphérique du second ordre telle que l'intégrale

$$\iint X'^2\,d\sigma$$

étendue à toute la sphère ait une valeur constante donnée K, la même pour toutes les fonctions sphériques X'. Nous écrirons simplement

$$U'_2 = \sum A'X' \cos\theta', \tag{18}$$

en désignant, pour abréger, par

$$\theta' = \alpha'\chi' + \beta' l' + \gamma'\varpi' + h'$$

l'argument du cosinus. Alors, d'après (16) et (18), l'expression (17) de W peut s'écrire, en faisant sortir du signe $\iint$ tout ce qui ne dépend pas des coordonnées du lieu A,

$$W = \sum AA' \cos\varepsilon \cos(\theta - \varepsilon) \cos\theta' \iint XX'\,d\sigma. \tag{19}$$

Telle est l'expression de la fonction perturbatrice dont nous avons à chercher l'action sur l'orbite de la Lune.

110. Nous appliquerons la méthode de la variation des constantes. Nous commencerons par définir la position de la Lune par un système de six *éléments canoniques* [1]. Aux trois quantités χ', ϖ', l', nous adjoindrons, pour achever de déterminer la position de la Lune, les trois suivantes :

$$\xi' = \sqrt{a'},$$
$$\eta' = 1 - \sqrt{1 - e'^2},$$
$$\mu' = 2 \sin^2 \frac{i'}{2} = 1 - \cos i',$$

a', e', i' représentant le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sur l'équateur de l'orbite lunaire.

Le vecteur des aires a alors pour valeur (à un facteur constant près dépendant des masses et dont nous faisons abstraction)

$$\sqrt{a'}\sqrt{1 - e'^2} = \xi'(1 - \eta'),$$

et la projection de ce vecteur sur la perpendiculaire au plan de l'équateur a pour valeur

$$\sqrt{a'}\sqrt{1 - e'^2}\cos i' = \xi'(1 - \eta')(1 - \mu').$$

Les six éléments

$$\xi', \quad \xi'(1 - \eta'), \quad \xi'(1 - \eta')(1 - \mu'), \quad l' - \varpi', \quad \varpi', \quad -\chi',$$

forment un système de *variables canoniques* [2] entre lesquelles existent les équations de Hamilton. Nous aurons en particulier

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi'}{dt} = \dfrac{dW}{d(l' - \varpi')}, \\[2ex] \dfrac{d[\xi'(1 - \eta')]}{dt} = \dfrac{dW}{d\varpi'}, \\[2ex] \dfrac{d[\xi'(1 - \eta')(1 - \mu')]}{dt} = \dfrac{dW}{d(-\chi')}. \end{cases}$$

(1) Voir H. Poincaré : *Leçons de Mécanique Céleste*, t. I, Chap. III.

(2) Ce sont celles qui ont été désignées par

$$L, \quad G, \quad \Theta, \quad l, \quad g, \quad \theta,$$

à la p. 76 de l'Ouvrage de M. H. Poincaré : *Leçons de Mécanique Céleste*, t. I. Dans les trois premières de ces variables, nous faisons abstraction d'un *même* facteur constant où figurent les masses de la Terre et de la Lune.

Telles sont les équations auxquelles nous conduit l'application de la méthode de la variation des constantes, pour calculer les perturbations des éléments lunaires sous l'action de la fonction perturbatrice W.

111. Le calcul qui précède est relatif à l'action, sur l'orbite lunaire, du bourrelet liquide soulevé sur les océans terrestres par la marée solaire. Ne pourrait-on pas appliquer le même calcul à l'action, sur l'orbite lunaire, du bourrelet liquide soulevé par la marée lunaire elle-même? On le peut certainement, mais à condition de prendre quelques précautions : χ', ϖ', l' devenant alors égaux à χ, ϖ, l, la fonction perturbatrice W se trouve dépendre de la variable χ de deux manières différentes : elle en dépend par χ et ensuite par χ'. Dans le calcul de $\frac{dW}{d\chi'}$, il faut donc supposer d'abord $\chi' \neq \chi$, puis dériver W par rapport à χ', et enfin faire $\chi = \chi'$. Les mêmes précautions doivent être prises dans le calcul des autres dérivées de W. En d'autres termes, il faut distinguer la Lune en tant qu'astre troublant producteur des marées et en tant qu'astre troublé par ces marées. C'est ainsi que Sir G. H. DARWIN appelle notre satellite Diane quand il est troublant et Lune quand il est troublé : alors χ, ϖ, l, sont les coordonnées de Diane, χ', ϖ', l', sont les coordonnées de la Lune, et l'on a

$$\chi' = \chi, \qquad \varpi' = \varpi, \qquad l' = l.$$

Moyennant cette précaution, notre analyse s'applique à l'action des marées lunaires sur la Lune elle-même.

112. Nous reprendrons donc les formules (20), et comme nous ne nous occupons que des effets séculaires, nous ne conserverons aux seconds membres que les termes constants indépendants du temps t. Nous avons d'après la formule (19)

$$(20^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dW}{d(l'-\varpi')} &= -\sum AA' \cos\varepsilon \cos(\theta-\varepsilon)\, \beta' \sin\theta' \iint XX'\, d\tau, \\ \frac{dW}{d\varpi'} &= -\sum AA' \cos\varepsilon \cos(\theta-\varepsilon)\, (\gamma'+\beta') \sin\theta' \iint XX'\, d\tau, \\ \frac{dW}{d(-\chi')} &= \sum AA' \cos\varepsilon \cos(\theta-\varepsilon)\, \alpha' \sin\theta' \iint XX'\, d\tau. \end{aligned} \right.$$

Dans ces expressions, le temps ne figure que dans le produit

$$\cos(\theta - \varepsilon)\sin\theta',$$

produit qui, développé, fournit des termes en

$$\frac{\cos}{\sin}(\theta - \theta')$$

et des termes en

$$\frac{\cos}{\sin}(\theta + \theta').$$

Nous aurons donc, aux seconds membres des expressions (20), un terme indépendant de t chaque fois que $\theta - \theta'$ ou $\theta + \theta'$ se réduira à une constante. Comme $\theta + \theta'$ n'est jamais une constante, les termes séculaires correspondent à

$$\theta - \theta' = \text{const.},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt}. \tag{21}$$

Si l'astre troublant et l'astre troublé sont différents, cette condition n'est jamais remplie [1], car le rapport des moyens mouvements de ces deux astres n'est pas commensurable. Nous pouvons donc dire que la marée solaire ne produit pas d'effet séculaire sur l'orbite lunaire.

Mais si l'astre troublant et l'astre troublé sont identiques, la condition (21) est remplie chaque fois que $\theta = \theta'$ et n'est remplie que dans ce cas : on a alors

$$\cos(\theta - \varepsilon)\sin\theta' = \frac{1}{2}\sin(\theta' - \theta + \varepsilon) + \frac{1}{2}\sin(\theta' + \theta - \varepsilon),$$

qui donne le terme constant

$$\frac{1}{2}\sin(\theta' - \theta + \varepsilon) = \frac{1}{2}\sin\varepsilon.$$

---

[1] Excepté pour les termes *sidéraux*. Ces termes sidéraux n'ont d'ailleurs d'influence que sur l'inclinaison, et cette influence est faible.

Les seconds membres des formules (20bis), dans lesquels on ne conserve que les termes constants indépendants de t, deviennent donc

$$-\sum AA' \frac{\sin 2\varepsilon}{4} \beta' \iint XX' d\sigma,$$

$$-\sum AA' \frac{\sin 2\varepsilon}{4} (\gamma' + \beta') \iint XX' d\sigma,$$

$$\sum AA' \frac{\sin 2\varepsilon}{4} \alpha' \iint XX' d\sigma.$$

Nous pouvons maintenant effacer les accents « prime » devenus inutiles, puisque tout se rapporte au même astre, la Lune. Nous remarquons que le facteur

$$-\frac{1}{4} \iint X^2 d\sigma$$

est *le même* pour tous les termes, puisque nous avons eu soin de choisir les fonctions sphériques X de façon que cette intégrale ait toujours la même valeur constante K (note de la p. 151). Nous n'écrivons donc pas ce facteur, qui est le même partout (quitte à le rétablir plus tard), et les formules (20bis) prennent la forme

$$(20^{ter}) \quad \begin{cases} \dfrac{dW}{d(l-\varpi)} = \sum A^2 \beta \sin 2\varepsilon, \\ \dfrac{dW}{d\varpi} = \sum A^2 (\gamma + \beta) \sin 2\varepsilon, \\ \dfrac{dW}{d(-\chi)} = -\sum A^2 \alpha \sin 2\varepsilon. \end{cases}$$

Rappelons-nous que l'angle ε est très petit et que par suite $\sin 2\varepsilon$ est proportionnel à $\operatorname{tang} \varepsilon$, c'est-à-dire à la vitesse de la marée $\frac{d\theta}{dt}$. Or,

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha \frac{d\chi}{dt} + \beta \frac{dl}{dt} + \gamma \frac{d\varpi}{dt},$$

et l'on a

$\frac{d\chi}{dt} = n$ vitesse angulaire de rotation de la Terre.

$\frac{dl}{dt} = \Omega$ vitesse angulaire de révolution de la Lune.

$\frac{d\varpi}{dt} = 0$ à très peu près.

Par suite, dans les formules (20ter), nous pouvons remplacer $\sin 2\varepsilon$ par

$$\alpha n + \beta\Omega$$

qui lui est proportionnel.

Finalement les formules (20), dans lesquelles on ne conserve que ce qui est relatif aux termes séculaires, sont devenues

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \sum A^2\beta(\alpha n + \beta\Omega), \\ \frac{d\,\xi(1-\eta)}{dt} &= \sum A^2(\gamma + \beta)(\alpha n + \beta\Omega), \\ \frac{d\,\xi(1-\eta)(1-\mu)}{dt} &= -\sum A^2\alpha(\alpha n + \beta\Omega). \end{aligned} \right.$$

Ces dernières formules, par un calcul immédiat, nous fournissent les suivantes :

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \sum A^2\beta(\alpha n + \beta\Omega), \\ \xi\frac{d\eta}{dt} &= -\sum A^2(\gamma + \eta\beta)(\alpha n + \beta\Omega), \\ \xi\frac{d\mu}{dt} &= \sum A^2(\alpha + \beta - \mu\beta)(\alpha n + \beta\Omega) + \text{termes en } \eta. \end{aligned} \right.$$

Ces trois formules vont nous permettre de calculer les variations séculaires du grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, provoquées par le bourrelet liquide de la marée lunaire elle-même. Dans la troisième de ces formules (22), qui nous servira à calculer la variation de l'inclinaison ($\mu = 1 - \cos i$), nous négligerons les termes en η, car

$$\eta = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

s'annule avec l'excentricité, et, dans le calcul relatif à l'inclinaison, nous pouvons, en première approximation, supposer l'excentricité nulle.

113. Les seconds membres de (22) sont des sommes de termes dont chacun provient d'un des termes

$$(15)\qquad AX\cos(\alpha\chi + \beta l + \gamma\varpi + h) = AX\cos\theta$$

en lesquels on a pu décomposer le potentiel U_2 producteur de la marée lunaire. Parmi ces termes, nous ne conserverons ici que ceux qui

sont du *premier ordre* au plus par rapport à l'excentricité e et à l'inclinaison . La théorie des marées [1] nous enseigne que ces termes sont les suivants :

Termes semi-diurnes :

$$(M_2) = \frac{\sin^2 \delta}{2} \cos (2\chi + 2\chi_0 - 2l) \qquad \text{(principal semi-diurne),}$$

$$(N) = \frac{7e}{2} \frac{\sin^2 \delta}{2} \cos (2\chi + 2\chi_0 - 3l + \varpi) \qquad \text{(elliptique majeur),}$$

$$(L) = -\frac{e}{2} \frac{\sin^2 \delta}{2} \cos (2\chi + 2\chi_0 - l - \varpi) \qquad \text{(elliptique mineur) ;}$$

Termes diurnes :

$$(O) = \sin \frac{i}{2} \sin 2\delta \cos \left(\chi + \chi_0 - 2l + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(principal diurne),}$$

$$(K_1) = \sin \frac{i}{2} \sin 2\delta \cos \left(\chi + \chi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(sidéral);}$$

Terme à longue période :

$$(M_m) = \frac{e}{2} (1 - 3 \cos^2 \delta) \cos (l - \varpi) \qquad \text{(elliptique mensuel).}$$

Ces six termes sont ceux que nous conserverons dans U_2 (seul le premier (M_2) est indépendant de e et de i).

114. Tels qu'ils sont, ces six termes ne sont pas tout à fait de la forme (15) (puisque χ_0 figure dans l'argument) ; or, il convient de les rendre de cette forme.

1° Les trois termes semi-diurnes sont de la forme

$$(sd) \qquad B \frac{\sin^2 \delta}{2} \cos (2\chi_0 + \theta),$$

qui peut s'écrire

$$B \frac{\sin^2 \delta}{2} \cos 2\chi_0 \cos \theta - B \frac{\sin^2 \delta}{2} \sin 2\chi_0 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right);$$

---

[1] *Voir* Maurice Lévy : *Leçons sur la théorie des Marées* t. I, Ch. III, et H. Poincaré : *Leçons de Mécanique Céleste* t III, *Théorie des Marées*, Ch. II. Nous faisons ici abstraction d'un facteur constant, le *même* pour tous les termes. Et nous laissons de côté les termes évectionnels et variationnels, bien qu'ils ne contiennent e qu'à la puissance 1 ou 0, parce qu'ils se trouvent affectés de coefficients numériques très petits.

or,

$$\frac{\sin^2\delta}{2}\cos 2\chi_0 = \frac{x^2-y^2}{2}$$

et

$$\frac{\sin^2\delta}{2}\sin 2\chi_0 = xy$$

sont justement des fonctions sphériques X qui donnent à l'intégrale

$$\iint X^2\,d\sigma$$

la valeur K (note de la p. 151). Donc chaque terme semi-diurne (*sd*) fournit *deux* termes de la forme (15) ayant respectivement pour coefficient B et — B, et pour argument θ et $\theta - \frac{\pi}{2}$. Par suite, chaque terme semi diurne fournit aux seconds membres des formules (22) *deux* termes égaux, pour lesquels on a

$$A^2 = B^2.$$

2° Les deux termes diurnes sont de la forme

$$(d)\qquad B\sin 2\delta\cos(\chi_0+\theta),$$

ce qui peut s'écrire

$$2B\frac{\sin 2\delta}{2}\cos\chi_0\cos\theta - 2B\frac{\sin 2\delta}{2}\sin\chi_0\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right);$$

or,

$$\frac{\sin 2\delta}{2}\cos\chi_0 = xz$$

et

$$\frac{\sin 2\delta}{2}\sin\chi_0 = yz$$

sont justement des fonctions sphériques X qui donnent à l'intégrale

$$\iint X^2\,d\sigma$$

la valeur K. Donc chaque terme diurne (*d*) fournit *deux* termes de la forme (15) ayant respectivement pour coefficient 2B et — 2B, et

pour argument θ et $\theta - \frac{\pi}{2}$. Par suite, chaque terme diurne fournit aux seconds membres des formules (22) *deux* termes égaux, pour lesquels on a

$$A^2 = 4\,B^2\,;$$

3° Le terme à longue période est de la forme

$$B\,\frac{1 - 3\cos^2\delta}{2}\cos\theta\,;$$

et, comme

$$\frac{1 - 3\cos^2\delta}{2\sqrt{3}} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2\sqrt{3}}$$

est une fonction sphérique X donnant à l'intégrale

$$\int\!\!\int X^2\,d\sigma$$

la valeur K, ce terme est de la forme (15), ayant pour coefficient $B\sqrt{3}$. Il donnera donc aux seconds membres des formules (22) *un seul* terme pour lequel on aura

$$A^2 = 3\,B^2.$$

Comme chaque terme diurne ou semi-diurne en fournit *deux* égaux dans les seconds membres des formules (22), tandis que le terme à longue période n'en fournit qu'*un seul*, il y a lieu de multiplier par 2 la quantité A^2 relative à chaque terme diurne ou semi-diurne. Au lieu de cela, nous *diviserons* par 2 la quantité A^2 relative au terme à longue période [1], pour lequel on devra prendre, par conséquent,

$$A^2 = \frac{3\,B^2}{2}.$$

115. Bref, si nous prenons les six termes

$$(M_2),\quad (N),\quad (L),\quad (O),\quad (K_1),\quad (M_m),$$

---

[1] Cela revient à faire abstraction, ainsi que nous l'avons déjà fait plusieurs fois, d'un *même* facteur constant aux seconds membres des équations (22).

nous pouvons former le tableau suivant à double entrée :

	α	β	γ	A^2	$\alpha n + \beta\Omega$	$-\gamma-\eta\beta$	$\alpha+\beta-\mu\beta$
Terme (M_2)	2	-2	0	1	$2n-2\Omega$	2η	2μ
Terme (N)	2	-3	1	$\frac{49}{2}\eta$	$2n-3\Omega$	-1	»
Terme (L)	2	-1	-1	$\frac{1}{2}\eta$	$2n-\Omega$	1	»
Terme (O)	1	-2	0	2μ	$n-2\Omega$	»	-1
Terme (K_1)	1	0	0	2μ	n	»	1
Terme (M_m)	0	1	-1	3η	Ω	1	»

Pour le calcul des quantités A^2, e^2 a été remplacé par 2η et $\sin^2\frac{i}{2}$ par $\frac{\mu}{2}$. Dans les deux dernières colonnes on n'a conservé les termes en η et en μ que pour le terme principal (M_2). Enfin, dans l'avant dernière colonne, on ne s'est pas occupé des termes (O) et (K_1) qui contiennent $\sin\frac{i}{2}$ en facteur; dans la dernière colonne, on ne s'est pas occupé des termes (N), (L) et (M_m) qui contiennent e en facteur; car, pour le calcul des variations de l'excentricité, nous supposons l'inclinaison nulle et, pour le calcul des variations de l'inclinaison, nous supposons l'excentricité nulle.

116. Le Tableau précédent fournit tous les éléments nécessaires pour calculer

$$\frac{d\xi}{dt}, \qquad \xi\frac{d\eta}{dt}, \qquad \xi\frac{d\mu}{dt}$$

au moyen des formules (22). Nous trouvons ainsi

$$\frac{d\xi}{dt} = (-4n + 4\Omega) + \text{termes en } \eta \text{ et en } \mu,$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt} = 2\eta(2n - 2\Omega) - \frac{49}{2}\eta(2n - 3\Omega) + \frac{1}{2}\eta(2n - \Omega) + 3\eta\Omega,$$

$$\xi\frac{d\mu}{dt} = 2\mu(2n - 2\Omega) - 2\mu(n - 2\Omega) + 2\mu n.$$

Ces trois formules s'écrivent (en négligeant au second membre de la première les termes en η et μ à côté du premier terme qui est fini)

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = -4n + 4\Omega, \\ &\frac{1}{\eta}\xi\frac{d\eta}{dt} = -44n + 72\Omega, \\ &\frac{1}{\mu}\xi\frac{d\mu}{dt} = 4n. \end{aligned}\right.$$

Rappelons-nous que nous avons fait abstraction, aux seconds membres des formules (20) ou (22), d'un *même* facteur constant. Ce facteur, il est facile de le voir, est négatif. Désignons-le par $-\frac{k}{4}$, et rétablissons-le maintenant dans les formules (23) qui deviennent ainsi

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = k(n - \Omega), \\ &\frac{1}{\eta}\xi\frac{d\eta}{dt} = k(11n - 18\Omega), \\ &\frac{1}{\mu}\xi\frac{d\mu}{dt} = -kn. \end{aligned}\right.$$

Au lieu de conserver les variables η et μ, introduisons l'excentricité e et l'inclinaison i : nous avons, à des termes près d'ordre supérieur,

$$\eta = \frac{e^2}{2}, \qquad \mu = 2\sin^2\frac{i}{2} = \frac{i^2}{2},$$

et par suite

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{2}{e}\frac{de}{dt},$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{2}{i}\frac{di}{dt}.$$

Les équations (24) s'écrivent donc

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = k(n - \Omega), \\ &\xi\frac{de}{dt} = \frac{ke}{2}(11n - 18\Omega), \\ &\xi\frac{di}{dt} = -\frac{ki}{2}n. \end{aligned}\right.$$

Ces dernières équations donneront les variations du grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire par suite de l'effet des marées.

117. Nous voulons aussi calculer la variation de la vitesse angulaire n de rotation de la Terre. Nous nous servirons pour cela du théorème des aires. Dans la Section **II** de ce Chapitre, nous avons posé

$$x = \varrho^{-\frac{1}{2}}, \qquad y = n;$$

et l'équation des aires nous a donné (nº **98**)

$$(3) \qquad x + y = h.$$

En vertu de la troisième loi de Képler, x est proportionnel à la racine carrée du grand axe, c'est-à-dire à ce que nous appelons ici ξ. Donc, en adoptant des unités convenables, cette équation (3) peut s'écrire

$$\xi + n = h.$$

Mais cette équation n'a été établie qu'en supposant nulle l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur, hypothèse que nous abandonnons ici. Représentons (*fig.* 32) par O le plan de l'orbite lunaire,

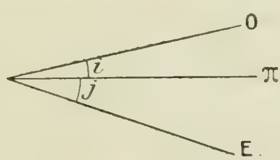


fig. 32.

par E celui de l'équateur terrestre, et par Π le plan invariable (plan du maximum des aires).

Modifiant un peu les notations précédentes, nous appellerons i l'inclinaison de l'orbite sur le plan invariable et j l'inclinaison de celui-ci sur l'équateur.

Le théorème des aires donne alors les deux équations suivantes :

$$\xi \cos i + n \cos j = h,$$
$$\xi \sin i - n \sin j = 0.$$

Les angles i et j étant supposés petits, ces équations s'écrivent approximativement

$$(26) \qquad \begin{cases} \xi + n = h, \\ jn = i\xi. \end{cases}$$

Ces équations nous serviront à calculer les variations des éléments terrestres n et j, puisque les variations des éléments lunaires ξ et i sont données par les équations (25). Nous aurons d'abord

$$(27) \qquad \frac{dn}{dt} = -\frac{d\xi}{dt} = -k(n-\Omega).$$

Ensuite, puisque nous appelons maintenant $j+i$, ce qui, dans les équations (25), est désigné simplement par i, nous devons, dans la troisième équation (25), remplacer i par $j+i$ (di n'étant pas changé); cette équation devient

$$(28) \qquad \xi\frac{di}{dt} = -\frac{kn}{2}(i+j).$$

Alors la seconde équation (26) donne

$$j\frac{dn}{dt} + n\frac{dj}{dt} = i\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{di}{dt},$$

d'où nous tirons

$$(29) \qquad n\frac{dj}{dt} = \frac{k}{2}(i+j)(n-2\Omega).$$

118. Réunissons dans un tableau les deux premières équations (25) et les équations (27), (28) et (29) :

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = k(n-\Omega), \\ \dfrac{dn}{dt} = -k(n-\Omega), \\ \dfrac{de}{dt} = \dfrac{ke}{2\xi}(11n-18\Omega), \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{kn}{2\xi}(i+j), \\ \dfrac{dj}{dt} = \dfrac{k}{2n}(i+j)(n-2\Omega). \end{cases}$$

C'est de ces équations que nous allons tirer les variations des éléments.

119. Remarquons d'abord que les deux premières ne contiennent ni e, ni i. Elles donnent les variations de la rotation terrestre et de la distance moyenne de la Lune. Ce sont ces variations que nous avons discutées en détail dans la Section **II**. Rappelons les résultats de cette

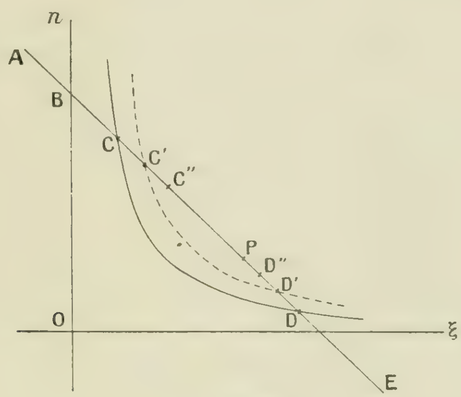


fig. 33.

discussion. Prenant pour abscisse ξ et pour ordonnée n (*fig.* 33), nous traçons la droite

$$\xi + n = h,$$

et la courbe de rigidité

$$n\xi^3 = 1$$

qui coupe la droite en deux points C et D. Le point représentatif (ξ, n) du système Terre-Lune est parti de C, état dans lequel le jour et le mois étaient tous deux égaux à $5^h 36^m$; actuellement, ce point représentatif est en P ($\xi = 3{,}2$, $n = 0{,}8$) ; et l'état final sera représenté par D, où le jour redeviendra égal au mois, leur durée commune étant de 55 jours actuels.

120. Passons maintenant à la variation de l'excentricité e donnée par la troisième équation (30). Il s'agit de savoir si $\frac{de}{dt}$ est positif ou négatif, pour reconnaître si l'excentricité e croît ou décroît. Or, le signe de $\frac{de}{dt}$ dépend du signe de l'expression

$$11n - 18\,2.$$

Si

$$11n - 18\Omega > 0,$$

l'excentricité croît. Si, au contraire,

$$11n - 18\Omega < 0,$$

l'excentricité décroît. Traçons sur la figure 33 la courbe

$$11n - 18\Omega = 0,$$

c'est-à-dire la courbe

$$n\xi^3 = \frac{18}{11}.$$

Cette courbe (représentée en trait ponctué) coupe la droite AE en deux points C′ et D′.

Lorsque le point représentatif (ξ, n) parcourait le segment de droite CC′, on avait

$$n\xi^3 < \frac{18}{11},$$

c'est-à-dire

$$11n - 18\Omega < 0;$$

l'excentricité a donc commencé par décroître.

En P (état actuel), on est entre C′ et D′, par suite

$$11n - 18\Omega > 0,$$

et l'excentricité est en train de croître.

Enfin, lorsque le point représentatif parcourra D′D, l'excentricité recommencera à décroître.

Si l'on trace la courbe (*fig.* 34) qui représente les variations de l'excentricité e en fonction de ξ (ce qui est possible puisqu'on connaît l'état actuel P), on constate que cette courbe présente une asymptote verticale correspondant à l'abscisse du point C et que l'excentricité e passe par un minimum en C′, par un maximum en D′, puis décroît ensuite jusqu'au point final D où elle s'annule.

Il ne faudrait pas croire que l'asymptote verticale signifie que l'excentricité a été initialement très grande. Les équations (30), en effet, supposent essentiellement e très petit et cessent d'être applicables dès que e devient grand.

D'ailleurs, ce n'est pas ainsi que le problème se pose. Supposons que l'excentricité e ait été initialement nulle, la troisième équation (30) donnerait

$$\frac{de}{dt} = 0;$$

donc

$$e = 0$$

est une solution : elle correspond à une orbite circulaire restant indéfiniment circulaire [1]. L'important est de savoir si cette solution est

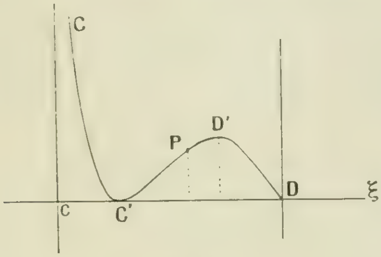


fig. 34.

stable ou *instable*. Supposons que e ait subi une petite variation : la troisième équation (30) étant de la forme

$$\frac{de}{dt} = Me,$$

la solution

$$e = 0$$

sera stable ou instable, suivant que M, c'est-à-dire

$$11n - 18\Omega,$$

sera négatif ou positif.

Donc, tant que le point représentatif (*fig.* 33) est situé entre C et C', la solution

$$e = 0$$

est stable : l'orbite reste circulaire. Mais à partir du point C' cette solution devient instable, et l'excentricité, ayant cessé d'être nulle

---

[1] Cf., n° **97**.

par suite d'une petite perturbation quelconque, croît jusqu'en D′ ; puis, à partir de là, $\frac{de}{dt}$ devenant négatif, elle décroît jusqu'en D où elle s'annule.

La courbe représentative de l'excentricité (*fig.* 34) se composerait ainsi de la portion de droite cC' et du morceau de courbe C′D′D.

Par suite, le fait qu'actuellement l'orbite lunaire est excentrique n'implique pas forcément qu'à l'origine l'excentricité était différente de zéro : *le frottement des marées a pu*, d'après Sir G. H. Darwin, *faire naître une excentricité qui n'existait pas initialement.*

121. Étudions maintenant les variations des inclinaisons i et j, données par les deux dernières équations (30). Comme ce qui nous intéresse c'est l'angle $i+j$ que fait l'orbite avec l'équateur, nous ajoutons ces deux équations : il vient

$$\frac{d(i+j)}{dt} = \frac{k}{2}(i+j)\left(1 - 2\frac{\Omega}{n} - \frac{n}{\xi}\right). \tag{31}$$

Donc $(i+j)$ croîtra ou décroîtra suivant le signe de la quantité

$$1 - 2\frac{\Omega}{n} - \frac{n}{\xi} = 1 - \frac{2}{n\xi^3} - \frac{n}{\xi}.$$

Remplaçant n par $h - \xi$, cette quantité s'écrit (au facteur positif $n\xi^3$ près)

$$-2\xi^4 + 3h\xi^3 - h\xi^2 - 2\,;$$

ce polynôme en ξ présente deux variations de signe ; il a donc au plus deux racines positives. Dans le cas de la Lune, il a effectivement deux racines positives qui correspondent aux abscisses de deux certains points C″ et D″ situés entre C et D (*fig.* 33).

Nous pouvons donc faire pour l'inclinaison la même discussion que pour l'excentricité. Nous avons pour l'équation (31) la solution

$$i + j = 0.$$

Cette solution est stable lorsque le point représentatif est entre C et C″ ; elle devient instable entre C″ et D″. Si donc nous partons d'un état initial où l'inclinaison $i+j$ est nulle, l'inclinaison restera nulle au début ; puis, lorsque le point représentatif sera arrivé en C″, si elle cesse d'être nulle par suite d'une petite perturbation quelconque, elle

augmentera jusqu'en D ; ensuite elle diminuera jusqu'en D où elle s'annulera de nouveau.

Nous voyons donc que *le frottement des marées a pu faire naître une inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur, qui n'existait pas initialement.*

122. Nous venons d'exposer, d'après Sir G. H. Darwin, l'évolution passée du système Terre-Lune. Mais quelle a pu être la *durée* de cette évolution ? Nos formules ne nous l'apprennent pas, car il y entre le coefficient de viscosité inconnu qu'avait la Terre quand elle était encore pâteuse. Néanmoins nous pouvons reconnaître facilement qu'il y a un *maximum* de l'action perturbatrice, c'est-à-dire un *minimum* de temps nécessaire.

Les seconds membres des formules (20ter) sont de la forme

$$(32) \qquad \sum A^2\beta \sin 2\varepsilon.$$

Les A^2 et les β sont connus par la théorie des marées. Mais les $\sin 2\varepsilon$, définis par les équations

$$\operatorname{tg}\varepsilon = k(\alpha n - \beta\Omega),$$

sont inconnus puisque k dépend de la viscosité. Or, un sinus est toujours inférieur à l'unité en valeur absolue. Nous exagérerons donc l'expression (32), par suite nous diminuerons le temps nécessaire à la variation de ξ, si nous remplaçons les $\sin 2\varepsilon$ par l'unité et si nous prenons tous les termes avec le même signe.

Epoques	Durée du jour	Durée du mois en jours actuels	Inclinaison	Inverse de l'aplatissement	Distance (en rayons terrestres actuels)	$\frac{\xi}{n}$	Chaleur dégagée
0	$23^h 56^m$	27,32	23°28′	232	60,4	4,01	0
46.300.000	15 30	18,62	20 40	96	46,8	2,28	225
56.600.000	9 55	8,17	17 20	40	27,0	1,11	760
56.800.000	7 50	3,59	15 30	25	15,6	0,67	1300
56.810.000	6 45	1,58	14 25	18	9,0	0,44	1760

C'est de cette façon qu'a procédé Sir G. H. Darwin pour introduire le temps dans son analyse. Il a dressé le Tableau ci-dessus, dans lequel

la première colonne indique le nombre d'années écoulées à partir de l'époque actuelle, et *en arrière* (ces époques sont de plus en plus rapprochées à mesure qu'on remonte dans le passé, parce que, la Lune étant alors plus proche de la Terre, les effets des marées étaient plus considérables).

L'énergie mécanique du système Terre-Lune a toujours été en diminuant, le frottement la transformant en chaleur. Si cette chaleur avait été employée à échauffer la Terre, elle aurait élevé sa température d'un certain nombre de degrés (Farenheit) : c'est ce nombre de degrés qui figure à la dernière colonne du Tableau. Sir G. H. Darwin fait remarquer que l'on pourrait peut-être invoquer cette cause pour expliquer l'origine de la chaleur interne du globe.

123. Sir G. H. Darwin a aussi essayé de calculer une valeur du coefficient de viscosité inconnu de la Terre, en partant de l'accélération séculaire de la Lune. Des observations d'éclipses dans l'antiquité ont permis d'évaluer cette accélération à 10″. Or, le calcul indique une accélération théorique de 6″ seulement. Il y a donc une accélération de 4″ que la gravitation n'explique pas [1]. Sir G. H. Darwin cherche, comme le fit autrefois Delaunay (nº **95**), à en rendre compte par l'augmentation du jour sidéral, due au frottement des marées. La Lune s'éloignant de la Terre subit réellement, non pas une accélération, mais un retard, et son accélération apparente ne serait due qu'à la différence entre le retard réel de la rotation terrestre et le retard réel de la révolution lunaire, le premier de ces deux retards étant plus grand que l'autre. C'est en égalant à 4″ la différence de ces deux retards, telle que la lui donnent ses formules, que Sir G. H. Darwin a calculé le coefficient de viscosité de l'intérieur de la Terre. Si l'on adoptait le coefficient ainsi obtenu, on trouverait pour la durée de l'évolution plusieurs milliards d'années ; mais il importe d'observer que la Terre a pu être autrefois beaucoup plus liquide qu'aujourd'hui.

124. Jusqu'ici, nous avons toujours adopté des unités particulières destinées à simplifier les formules. Cela était légitime, parce que nous étudiions l'action des marées produites par un même astre, la Lune,

---

[1] Peut-être qu'en ajoutant moins de foi à certains passages d'Auteurs anciens, qui en sont parfois peu dignes, ou dont les textes sont plus ou moins obscurs, quand ils rapportent des observations d'éclipses, on arriverait à rétablir l'accord entre l'observation et la théorie de la gravitation.

sur un même astre, la Terre. Mais si nous voulons maintenant comparer l'action des marées produites par divers astres sur un même astre, ou par un même astre sur divers astres (par exemple si nous envisageons le système formé par une planète et plusieurs satellites, ou bien le système formé par le Soleil et l'ensemble des planètes), il faudra rétablir les coefficients de proportionnalité. C'est ce que nous allons faire.

125. De même que la marée lunaire a une influence sur la longueur du jour et du mois, la marée solaire a une influence sur la longueur du jour et de l'année. Désignons par S, L, T les masses du Soleil, de la Lune, de la Terre. Nous appelons toujours

C	le moment d'inertie de la Terre,
n	sa vitesse angulaire de rotation,
Ω	la vitesse de révolution de la Lune,
a	le demi-grand axe de son orbite.

L'équation des aires, appliquée au système Terre-Lune, supposé seul, s'écrit

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{L}a^2\Omega + \mathrm{C}n = \text{const.}$$

$\mathrm{C}n$ représente le moment de rotation dû à la rotation terrestre, $\mathrm{L}a^2\Omega$ le moment de rotation dû au mouvement orbital de la Lune. Le moment de rotation dû au mouvement orbital de la Terre autour du centre de gravité du système Terre-Lune étant très petit, nous le négligeons à côté de $\mathrm{L}a^2\Omega$. Quant à celui qui est dû à la rotation de la Lune sur elle-même, nous en faisons abstraction, envisageant ici la Lune comme un simple point matériel sans dimensions.

Ecrivons maintenant l'équation des aires pour le système Terre-Soleil, supposé seul. Appelant

Ω'	la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil,
a'	le demi-grand axe de l'orbite terrestre,

nous aurons

$$\text{(34)} \qquad \mathrm{T}a'^2\Omega' + \mathrm{C}n = \text{const.}$$

$\mathrm{C}n$ représente toujours le moment de rotation dû à la rotation terrestre; $\mathrm{T}a'^2\Omega'$ représente le moment de rotation dû au mouvement

orbital de la Terre autour du Soleil, à côté duquel celui qui est dû au mouvement orbital du Soleil, autour du centre de gravité du système Terre-Soleil, est négligeable. Nous faisons aussi abstraction du moment de rotation dû à la rotation du Soleil sur lui-même, envisageant ici le Soleil comme un simple point matériel, ou, si l'on préfère, comme une sphère absolument rigide dont le moment de rotation est constant.

Transformons les équations (33) et (34), en introduisant les quantités

$$\xi = \Omega^{-\frac{1}{3}}, \qquad \xi' = \Omega'^{-\frac{1}{3}},$$

et en nous servant de la troisième loi de Képler qui donne

$$a^3\Omega^2 = \mathrm{T},$$
$$a'^3\Omega'^2 = \mathrm{S}.$$

Les équations des aires (33) et (34) s'écrivent alors

$$\mathrm{LT}^{\frac{2}{3}}\xi + \mathrm{C}n = \text{const.},$$
$$\mathrm{TS}^{\frac{2}{3}}\xi' + \mathrm{C}n = \text{const.}.$$

Considérons d'abord l'action de la marée lunaire. Cette marée donne, pendant un certain temps τ, à la rotation n de la Terre une variation δn, et il en résulte pour ξ une variation $\delta\xi$ donnée par

$$(35) \qquad \mathrm{LT}^{\frac{2}{3}}\,\delta\xi + \mathrm{C}\,\delta n = 0.$$

De même, la marée solaire fait, dans le même temps τ, subir à n une variation $\delta' n$, et il en résulte pour ξ' une variation $\delta'\xi'$ donnée par

$$(36) \qquad \mathrm{TS}^{\frac{2}{3}}\,\delta'\xi' + \mathrm{C}\,\delta' n = 0.$$

Comparons $\delta' n$ à δn : il s'agit de l'action de deux marées différentes sur un même astre, la Terre. Le rapport de $\delta' n$ à δn sera donc approximativement égal au rapport $\frac{\mathrm{A}'^2}{\mathrm{A}^2}$ des carrés des coefficients des deux marées. La marée solaire est environ trois fois moindre que la marée lunaire. On a donc

$$\frac{\delta' n}{\delta n} = \frac{\mathrm{A}'^2}{\mathrm{A}^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

L'augmentation de la durée du jour provenant de la marée solaire est donc environ 9 fois moindre que celle qui provient de la marée lunaire.

Les équations (35) et (36) donnent ensuite

$$\frac{\delta\xi'}{\delta\xi} = \frac{1}{9}\frac{LT^{\frac{2}{3}}}{TS^{\frac{2}{3}}};$$

or, le second membre est extrêmement petit; $\delta\xi'$ est donc incomparablement plus petit que $\delta\xi$; ce qui signifie que la marée solaire n'a qu'une influence insignifiante sur la distance moyenne de la Terre au Soleil, c'est-à-dire sur la longueur de l'année.

126. Les marées que la Lune soulève sur la Terre ralentissent la rotation terrestre. De même les marées que la Terre pourrait soulever sur la Lune exerceraient une influence sur la rotation de la Lune. Actuellement, la Terre ne soulève pas de marées sur la Lune, puisque la Lune nous présente toujours le même hémisphère. Mais aux époques reculées, la Terre a dû soulever des marées sur son satellite, et c'est précisément, ainsi que l'avait déjà affirmé Laplace, à l'action de ces marées qu'est due l'égalité actuelle de la durée de rotation et de la durée de révolution de la Lune.

Soit M la masse de l'astre perturbateur qui produit la marée sur un astre sphérique T de rayon a (*fig.* 35). Appelons c la distance

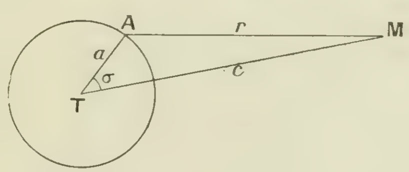


fig. 35.

TM du centre de la sphère T à l'astre perturbateur et r la distance MA de l'astre perturbateur à un point A de la surface de l'astre T. Le potentiel dû à l'astre perturbateur est

$$\begin{aligned}\frac{M}{r} &= \frac{M}{c}\left(1 - 2\frac{a}{c}\cos\sigma + \frac{a^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{M}{c} + \frac{Ma}{c^2}\cos\sigma - \frac{Ma^2}{c^3}\frac{3\cos^2\sigma - 1}{2}\\ &= U_0 + U_1 + U_2.\end{aligned}$$

Le potentiel générateur de la marée est

$$U_2 = \frac{Ma^2}{c^3} \frac{3\cos^2\sigma - 1}{2},$$

il est proportionnel à

$$\frac{Ma^2}{c^3}.$$

La dénivellation statique est

$$\zeta = \frac{U_2}{g}.$$

elle est proportionnelle à

$$\frac{Ma^2}{c^3 g}.$$

Le bourrelet liquide, dû à cette dénivellation, produit sur l'astre M un potentiel perturbateur

$$W = Mw \iint \frac{\zeta \, d\sigma}{r},$$

où w désigne la densité du bourrelet liquide soulevé sur l'astre T. Or, nous avons, le signe $\backsim$ indiquant la proportionnalité,

$$\zeta \backsim \frac{Ma^2}{c^3 g},$$

$$d\sigma \backsim a^2,$$

et $\frac{M}{r}$ peut, sous le signe $\iint$ être remplacé par U_2 (¹) qui est proportionnel à $\frac{Ma^2}{c^3}$. Nous pouvons donc écrire

$$W \backsim \frac{M^2 a^6 w}{c^6 g}.$$

Le couple Γ qui fait varier la rotation de l'astre T est proportionnel à

$$\frac{dW}{d\chi},$$

(¹) Car on a

$$\iint \zeta U_0 \, d\sigma = 0, \qquad \iint \zeta U_1 \, d\sigma = 0$$

puisque ζ est une fonction sphérique du second ordre.

puisque

$$\frac{dW}{d\chi}\, d\chi$$

représente le travail virtuel produit dans une petite rotation $d\chi$ de la sphère T.

Comme $\dfrac{dW}{d\chi}$ est lui-même proportionnel à W [1] le couple Γ est proportionnel à

$$\frac{M^2 a^6 w}{c^6 g}.$$

Si, maintenant, nous tenons compte de la viscosité de l'astre T, nous trouvons

$$\text{couple perturbateur } \Gamma \backsim \frac{M^2 a^6 w}{c^6 g} \sin 2\varepsilon.$$

La dérivée $\dfrac{dn}{dt}$ de la vitesse de rotation de l'astre T s'obtiendra en divisant le couple perturbateur Γ par le moment d'inertie de la sphère T qui est proportionnel à wa^5.

Bref, nous aurons

$$\frac{dn}{dt} \backsim \frac{M^2 a}{c^6 g} \sin 2\varepsilon.$$

L'angle ε est défini par l'équation

$$\operatorname{tg} \varepsilon = k\alpha,$$

k étant une constante proportionnelle à la viscosité et α étant proportionnel à la vitesse de la marée. Pour la marée principale semi-diurne, on trouve, en faisant le calcul,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 19\nu \frac{n - \Omega}{gaw},$$

ν étant le coefficient de viscosité de l'astre T. Comme l'angle ε est très petit (en prenant pour ν le coefficient de viscosité de la poix, on trouve que cet angle ne dépasse pas 10″ pour le système Terre-Lune), nous pouvons écrire

$$\sin 2\varepsilon \backsim \operatorname{tg} \varepsilon \backsim \frac{n - \Omega}{gaw}.$$

---

(1) Bien entendu, nous ne conservons dans W que le terme le plus important, celui qui, pour les marées terrestres, est appelé terme principal semi-diurne.

Or, nous avons pour la gravité g, à la surface de l'astre T

$$g \backsim \frac{wa^3}{a^2} \backsim wa,$$

et par suite

$$\sin 2\varepsilon \backsim \frac{n - \Omega}{g^2} \backsim \frac{n - \Omega}{a^2 w^2}.$$

Finalement, il vient

$$\frac{dn}{dt} \backsim \frac{M^2 a}{c^6 g} \frac{n - \Omega}{g^2} \backsim \frac{M^2(n - \Omega)}{c^6 w^3 a^2}.$$

Si la sphère T est la Terre et l'astre M la Lune, ces proportionnalités représentent la diminution de la rotation terrestre due à la marée lunaire.

Si, maintenant, nous voulions avoir la diminution $\frac{dn'}{dt}$ de la rotation de la Lune, due aux marées que la Terre produit sur la Lune, nous aurions

$$\frac{dn'}{dt} \backsim \frac{M'^2(\omega - \Omega)}{c^6 w'^3 a'^2},$$

où M′ désigne cette fois la masse de la Terre, w' et a' la densité et le rayon de la Lune, ω sa vitesse angulaire de rotation.

Actuellement, les durées de rotation et de révolution de la Lune étant les mêmes, $\omega - \Omega$ est nul et il en est de même de $\frac{dn'}{dt}$: l'action retardatrice de la Terre sur la Lune est épuisée. Mais il n'en a pas toujours été ainsi : à l'origine $\omega - \Omega$ était comparable à $n - \Omega$, et alors on avait

$$\frac{\frac{dn'}{dt}}{\frac{dn}{dt}} \backsim \left(\frac{M'}{M}\right)^2 \left(\frac{w}{w'}\right)^3 \left(\frac{a}{a'}\right)^2,$$

ce qui, puisque

$$M \backsim w'a'^3,$$
$$M' \backsim w a^3,$$

s'écrit

$$\frac{\frac{dn'}{dt}}{\frac{dn}{dt}} \backsim \left(\frac{w}{w'}\right)^5 \left(\frac{a}{a'}\right)^8.$$

Comme les densités w et w' de la Terre et de la Lune sont du même ordre, ce rapport est comparable à

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^8 = 32\,000 \text{ environ}.$$

Donc l'action retardatrice de la Terre sur la Lune a dû être au début environ 32 000 fois plus forte que l'action retardatrice de la Lune sur la Terre. On conçoit donc que cette action ait pu être assez puissante pour avoir arrêté le mouvement de rotation de la Lune relativement à la Terre, et pour avoir forcé notre satellite à nous tourner toujours la même face.

127. Si, maintenant, on étudie le système formé par le Soleil et les différentes planètes, on constate d'abord que l'action produite sur la rotation du Soleil par les marées que les planètes soulèvent sur le Soleil est tout à fait insignifiante. Quant à l'action retardatrice de la marée solaire sur la rotation des différentes planètes, son coefficient de proportionnalité est

$$\frac{M^2 a}{c^6 g}\,\frac{n - \Omega}{g^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{M^2 a n}{c^6 g^3},$$

en négligeant la vitesse angulaire Ω de révolution de la planète, à côté de sa vitesse angulaire n de rotation.

Or, M, masse du Soleil, est le même pour toutes les planètes, et l'on a

$$g \sim \frac{m}{a^2},$$

m étant la masse de la planète envisagée. Le coefficient de proportionnalité auquel est proportionnel $\frac{dn}{dt}$ est donc pour chaque planète

$$\frac{a^7 n}{c^6 m^3}.$$

Sir G. H. Darwin donne le Tableau suivant (où C représente le moment d'inertie de la planète) :

Planètes	$C\frac{dn}{dt}$	$\frac{dn}{dt}$
Mercure.	9,1	1 000
Vénus	8,1	11
La Terre	1	1
Mars	0,026	0,89
Jupiter	2,3	0,00005
Saturne	0,11	0,00002

Le calcul, en ce qui concerne Mercure et Vénus, a été fait en supposant à ces deux planètes une durée de rotation de 24 heures. On voit que, pour ces planètes intérieures, l'action retardatrice de la marée solaire est forte. S'il est vrai, comme le prétendent plusieurs observateurs, que ces deux planètes tournent toujours une même face vers le Soleil (1), ce fait pourrait s'expliquer par l'action retardatrice de la marée solaire. La théorie expliquerait aussi pourquoi les planètes extérieures Uranus et Neptune, n'ayant subi qu'une marée solaire très faible, ont conservé leur rotation rétrograde.

IV. Influence accélératrice du refroidissement.

128. Le refroidissement séculaire de la Terre la contracte et diminue son moment d'inertie ; par suite, en vertu de la loi des aires, sa vitesse de rotation doit s'accroître de ce chef. Il y a donc lieu, à côté de l'influence *retardatrice* des marées, étudiée dans les pages précédentes, de tenir compte de l'influence *accélératrice* du refroidissement.

Nous avons vu plus haut (n° **126**) que le couple retardateur Γ dû à la marée est proportionnel à

$$\frac{M^2 a^6 \omega}{r^6 g} \sin 2\varepsilon,$$

(1) Cette opinion, en ce qui concerne Vénus, ne paraît plus guère soutenable depuis les récentes observations spectroscopiques de M. Belopolsky.

c'est-à-dire à

$$\frac{M^2 a^5 w}{c^6 g^2}(n - \Omega),$$

ou encore à

$$\frac{M^2 a^9}{c^6 m^2}(n - \Omega).$$

Or, M (masse de la Lune) et m (masse de la Terre) sont des constantes, et nous regarderons aussi c (distance de la Lune à la Terre) comme constant. Par suite, le couple Γ est proportionnel à

$$a^9(n - \Omega).$$

Le moment de rotation Cn de la Terre aura sa dérivée $\frac{d(Cn)}{dt}$ proportionnelle au couple Γ : nous aurons donc l'équation

$$\frac{d(Cn)}{dt} = -Aa^9(n - \Omega),$$

A étant une certaine constante positive.

Comme C, moment d'inertie de la Terre, est proportionnel au carré a^2 de son rayon, nous pouvons écrire l'équation précédente ainsi

$$\frac{d(a^2 n)}{dt} = -Ba^9(n - \Omega),$$

B étant une nouvelle constante positive. De là nous tirons

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{2n}{a}\frac{da}{dt} - Ba^7(n - \Omega). \tag{37}$$

Par suite du refroidissement, le rayon terrestre a diminue, et $\frac{da}{dt}$ est négatif; donc, au second membre de l'équation (37), nous avons un terme positif dû au refroidissement séculaire, et un terme négatif dû au frottement de la marée.

Posons

$$\frac{da}{dt} = -\lambda a,$$

λ étant une quantité positive. L'équation (37) s'écrit

$$\frac{dn}{dt} = n(2\lambda - Ba^7) + Ba^7\Omega. \tag{38}$$

Nous allons tout d'abord supposer, à seule fin de faciliter les calculs, que le refroidissement suit la loi particulière indiquée par la formule

$$2\lambda = \mu a^7,$$

μ étant une constante : nous aurons alors

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2} a^8,$$

d'où

$$\frac{da}{a^8} = -\frac{\mu}{2} dt,$$

et

$$\frac{1}{7a^7} = \frac{\mu}{2}(t - t_0) :$$

le rayon terrestre, avec cette loi, varierait comme l'inverse de la racine septième du temps. L'équation (38) s'écrit alors

$$\frac{1}{a^7}\frac{dn}{dt} = n(\mu - B) + B\Omega.$$

Si l'on a

$$\mu > B,$$

n ira constamment en croissant, et tendra vers $\pm\infty$, suivant son signe.

Si l'on a

$$\mu < B.$$

n tendra vers une limite *finie* qui sera atteinte lorsque $\frac{dn}{dt}$ s'annulera, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{n}{\Omega} = \frac{-B}{\mu - B}.$$

Cette rotation finale est directe (de même signe que Ω), puisque le second membre est positif.

129. Appliquons cette loi du refroidissement à l'étude de l'évolution d'une nébuleuse planétaire qui se transforme en planète. Nous avons vu (Chap. III, n° **42**) qu'au début de son existence, lorsqu'elle vient de se former aux dépens d'un anneau de Laplace, la rotation d'une telle nébuleuse planétaire est rétrograde.

Alors, si

$$\mu > B,$$

l'effet du refroidissement l'emporte sur celui des marées : la rotation reste toujours rétrograde et tend même à s'accélérer. C'est ce qui a pu arriver pour les systèmes extérieurs d'Uranus et de Neptune.

Si

$$\mu < B$$

la rotation, d'abord négative, a varié en tendant vers la limite finale

$$\frac{-B\Omega}{\mu - B},$$

qui est positive. Si μ est inférieur à B, mais très voisin de B, cette vitesse angulaire finale est très grande. On peut penser que ce cas s'est présenté pour Jupiter et Saturne, car leur rotation est directe et très rapide.

Pour les planètes plus voisines du Soleil, $B - \mu$ croît puisque l'influence de la marée solaire se fait sentir davantage. La rotation finale est moins rapide.

Enfin, pour les planètes très voisines du Soleil (Mercure et Vénus) (tout au moins dans l'opinion de M. Schiaparelli), μ est négligeable devant B et la vitesse limite de rotation est

$$B = \Omega :$$

elle est égale à la vitesse de révolution.

130. Pour une loi de refroidissement autre que celle que nous avons envisagée pour simplifier, μ, au lieu d'être une constante, serait variable et n tendrait toujours à se rapprocher de

$$\frac{-B\Omega}{\mu - B}$$

si $\mu < B$, et à s'en éloigner si $\mu > B$.

Lord Kelvin estime que la variation séculaire de la durée du jour, due au refroidissement, serait de $\frac{1}{30}$ de seconde. Cette accélération est très petite à côté du retard qui serait dû à l'influence de la marée. On doit donc penser que, pour la Terre, l'effet du frottement de la marée interne l'emporte sur celui du refroidissement, et que la vitesse an-

gulaire n de rotation de la Terre est actuellement en voie de décroissance.

131. Une troisième cause peut modifier la rotation de la Terre. Cette cause, c'est l'augmentation de la masse de la Terre par suite de la pluie météorique, de la chute d'étoiles filantes dont elle est bombardée. Ces projectiles qui tombent sur la Terre viennent augmenter son moment d'inertie et, par conséquent, retarder sa rotation. On a dit qu'il suffirait, pour expliquer les $4''$ d'accélération séculaire de la Lune dont la gravitation ne rend pas compte, d'admettre que le rayon de la Terre s'accroît de 1 mètre en 10 000 ans, par suite de la chute des météores. Mais un tel accroissement du rayon terrestre représente une pluie météorique vraiment énorme et inadmissible.

V. — Hypothèse sur la formation de la Lune.

132. Nous avons dit que, d'après Sir G. H. Darwin, la Lune à sa naissance était très voisine de la Terre. Mais comment la Lune a-t-elle pu naître de la Terre ?

On peut d'abord supposer, restant dans l'ordre d'idées de Laplace, qu'elle s'est formée aux dépens d'un anneau abandonné par la nébuleuse terrestre.

On peut aussi — c'est là une hypothèse proposée par Sir G. H. Darwin — penser que la Terre encore liquide subissait la marée solaire : il est arrivé un moment où la période propre d'oscillation de cette masse fluide est devenue égale à la période de la marée solaire. Alors l'amplitude de la marée s'est exagérée par suite du phénomène de résonnance : l'intumescence est devenue énorme, et une portion de la masse se serait détachée de la Terre, lui formant un satellite.

Mais une autre hypothèse, que nous allons examiner maintenant, est encore admissible.

133. Rappelons ce que nous avons dit relativement aux figures d'équilibre d'une masse fluide homogène soumise à l'attraction mutuelle de ses parties et tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe ox (n° **47**). Nous avons comme figures d'équilibre possibles :

1° Des ellipsoïdes de révolution aplatis, dits ellipsoïdes de Mac-Laurin ;

2° Des ellipsoïdes à trois axes inégaux, dits ellipsoïdes de JACOBI. Reprenant les notations du n° **45**, nous appelons a, b, c les trois demi-axes de l'ellipsoïde qui est une figure d'équilibre, et nous posons

$$s = \frac{a^2}{b^2}, \qquad t = \frac{a^2}{c^2}.$$

Nous avons vu que s et t sont compris entre 0 et 1, c'est-à-dire que l'axe de rotation est toujours le plus petit axe de l'ellipsoïde, et que dans le plan des s, t, la courbe lieu du point (s, t) représentatif de l'ellipsoïde se compose, à l'intérieur du carré

$$0 < s < 1$$
$$0 < t < 1,$$

de la droite OA, et d'une ligne DB (*fig.* 36). La droite OA correspond

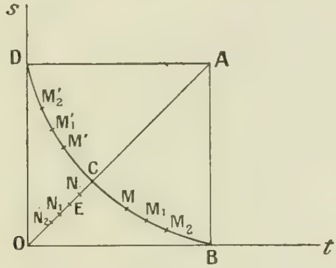


fig. 36.

aux ellipsoïdes de MAC-LAURIN, la courbe DB correspond aux ellipsoïdes de JACOBI.

Si l'on examine comment varie la vitesse angulaire ω lorsqu'on chemine sur ces deux portions de courbe, on constate qu'au point A où l'ellipsoïde de MAC-LAURIN est une sphère, la vitesse ω est nulle ; lorsqu'on décrit la droite AO dans le sens AO, ω croît jusqu'à un certain point E où il est maximum, puis décroît jusqu'en O où il s'annule de nouveau. Si, maintenant, on décrit l'arc DB qui correspond aux ellipsoïdes à axes inégaux, ω part de zéro en D, croît jusqu'en C où il passe par un maximum, puis décroît jusqu'en B où il s'annule. Deux points tels que M et M', symétriques par rapport à OA, représentent le même ellipsoïde de JACOBI, ayant simplement tourné de 90°.

Mais ces figures ellipsoïdales d'équilibre, de MAC-LAURIN ou de JACOBI, ne sont pas les seules possibles pour notre masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation : il en existe une infinité d'autres ([1]) dont nous allons maintenant parler.

134. Rappelons la définition des *coordonnées elliptiques* de l'espace. Considérons la famille de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Par chaque point de l'espace passent trois de ces surfaces : en effet, x, y, z étant donnés, on a pour déterminer λ^2 une équation du troisième degré, dont les racines sont séparées par les nombres a^2, b^2, c^2. Appelant ρ^2, μ^2, ν^2 ces trois racines, nous aurons

$$\rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2.$$

La plus grande racine ρ^2 correspond à un ellipsoïde, la racine moyenne μ^2 à un hyperboloïde à une nappe, la plus petite ν^2 à un hyperboloïde à deux nappes.

Réciproquement, si ρ, μ, ν sont donnés, on a trois surfaces se coupant en huit points placés symétriquement, par rapport aux divers plans de coordonnées. Si on ne considère que les points situés dans le trièdre positif des axes de coordonnées, les trois nombres ρ, μ, ν définissent un point et un seul : ce sont les coordonnées elliptiques de l'espace.

Soit R une fonction de ρ qui sera, soit un polynôme en ρ^2, soit un tel polynôme multiplié par un, deux ou trois des radicaux

$$\sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Soient M la *même* fonction de μ et N la *même* fonction de ν. M et N ne diffèrent de R que par le changement de ρ^2 en μ^2 et en ν^2 respectivement.

Le produit RMN est une fonction de x, y, z. Si cette fonction est harmonique, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) \text{RMN} = 0,$$

([1]) H. POINCARÉ : *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta Mathematica*, t. VII, 1885, p. 259-380). Voir aussi H. POINCARÉ : *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Leçons professées à la Sorbonne en 1900).

les fonctions R, M, N sont dites *fonctions de* LAMÉ. On démontre qu'il existe effectivement une infinité de fonctions de LAMÉ.

Considérons un ellipsoïde E correspondant à une valeur donnée ρ du paramètre, et définissons une surface Σ *voisine* de l'ellipsoïde E

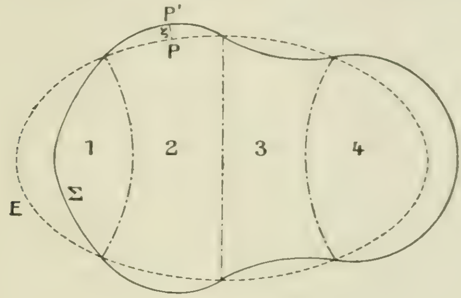


fig. 37.

(*fig.* 37) : en chaque point de E nous menons une petite normale PP' de longueur

$$\zeta = \varepsilon\, l MN,$$

en posant

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}:$$

l est une fonction bien déterminée du point quelconque P de l'ellipsoïde E ; M et N sont deux fonctions de LAMÉ conjuguées ; ε est une constante très petite.

Le lieu du point P' est une surface Σ qui coupe l'ellipsoïde E suivant des lignes de courbure : en effet, le long de l'intersection de ces deux surfaces, on a

$$\zeta = 0,$$

c'est-à-dire

$$M = 0 \qquad \text{ou} \qquad N = 0;$$

c'est dire que cette intersection est située sur un hyperboloïde

$$\mu = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \nu = \text{const.},$$

hyperboloïde qui, on le sait, coupe E suivant une ligne de courbure.

135. Revenons maintenant à nos ellipsoïdes de Mac-Laurin et de Jacobi, figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation. On peut démontrer qu'il existe une infinité d'ellipsoïdes de Mac-Laurin, correspondant à des points N, N_1, N_2, ..., (¹) de la droite AO (*fig.* 36), tels qu'une surface voisine Σ définie comme nous venons de le faire soit aussi une figure d'équilibre. De même, il existe une infinité d'ellipsoïdes de Jacobi, correspondant à des points M, M_1, M_2, ..., M', M'_1, M'_2, ..., de la courbe DB, tels qu'une surface voisine Σ soit aussi une figure d'équilibre.

136. Parlons maintenant de la *stabilité* de nos figures d'équilibre. On démontre que les ellipsoïdes de Mac-Laurin sont stables de A en C et instables de C en O (*fig*. 36). Pour les ellipsoïdes de Jacobi, il suffit d'examiner la demi-courbe CB : ils sont stables depuis C jusqu'au point M où l'on rencontre pour la première fois une figure Σ, ils sont instables de M en B.

Quant aux figures d'équilibre Σ voisines des ellipsoïdes, on démontre qu'elles sont toutes instables, sauf *peut-être* une seule, celle qui correspond justement au point M où l'ellipsoïde de Jacobi cesse d'être stable.

137. Considérons alors une masse fluide homogène animée originairement d'un mouvement de rotation et se refroidissant lentement. Si le refroidissement est assez lent, le frottement interne détermine la révolution de l'ensemble dans toutes ses parties avec la même vitesse angulaire. Le moment de rotation demeurera d'ailleurs constant.

Au début, la densité étant très faible, la figure de la masse est un ellipsoïde de révolution peu différent d'une sphère. Le refroidissement aura d'abord pour effet d'augmenter l'aplatissement de l'ellipsoïde qui restera cependant de révolution. Le point représentatif (*fig*. 36) décrira la portion de droite AC qui correspond aux ellipsoïdes de Mac-Laurin, et cela jusqu'en C où les ellipsoïdes de Mac-Laurin cessent d'être stables. Le point représentatif ne pouvant pas prendre le chemin CO prendra alors, par exemple, la direction CM ; l'ellipsoïde deviendra à trois axe inégaux, et cela jusqu'en M où les ellipsoïdes de Jacobi cessent d'être stables. A partir de là, la masse ne peut plus conserver la forme ellipsoïdale puisque celle-ci est devenue instable :

(¹) Les points N, N_1, N_2, ..., sont tous situés entre C et O.

elle prendra alors la seule forme possible, celle de la surface Σ voisine de l'ellipsoïde. Cette surface Σ (*fig.* 37) présente une figure piriforme, offrant comme un étranglement dans la région marquée 3, tandis que les régions 2 et 4 tendent à se renfler aux dépens des régions 1 et 3, comme si la masse cherchait à se diviser en deux masses inégales.

Il est difficile d'annoncer ce qui arrivera ensuite. On peut penser que la masse ira en se creusant de plus en plus dans la région 3 et finira par se partager en deux corps isolés.

La figure piriforme Σ, avons-nous dit, est *peut-être* stable; mais il n'est pas certain qu'elle le soit réellement. Sir G. H. Darwin a trouvé que cette figure est stable, mais, d'après M. Liapounoff, elle serait instable. Pour trancher la question il faudrait recommencer le calcul : or, ce calcul est extrêmement pénible.

Si cette figure Σ est instable, la rupture, la séparation de la masse fluide en deux masses inégales, au lieu d'être progressive, se produirait d'un seul coup et brusquement.

138. Quelles conclusions pouvons-nous tirer, au point de vue cosmogonique, de la discussion précédente ? Il est impossible de voir là une origine, même approchée, des planètes : car les planètes n'ont qu'une masse insignifiante relativement à celle du Soleil. Mais Sir G. H. Darwin estime [1] que certains satellites ont pu se former de cette façon aux dépens de leur planète. Cela aurait pu arriver notamment pour le système Terre-Lune dans lequel les deux masses sont comparables, l'une n'étant pas une fraction extrêmement petite de l'autre. La Lune, s'étant ainsi détachée de la Terre, aurait décrit autour d'elle une orbite de très petit rayon; mais, par suite du frottement des marées, ce rayon aurait été en augmentant, ainsi qu'il a été expliqué.

On pourrait concevoir de la même façon la formation de certaines étoiles doubles, dont les composantes ont des masses du même ordre de grandeur.

---

[1] Voir l'*Adresse* de Sir G. H. Darwin à M. H. Poincaré (Séance de la *Société royale astronomique de Londres* du 9 février 1900), traduite dans E. Lebon : *Savants du jour* : Henri Poincaré (Paris, Gauthier-Villars, 1909), p. 38-40.

CHAPITRE VIII.

SUR L'ORIGINE DE LA CHALEUR SOLAIRE ET DE LA CHALEUR TERRESTRE.

I. — Chaleur solaire.

139. Jusqu'ici c'est surtout au point de vue *mécanique* que nous avons envisagé le problème cosmogonique. Nous ne nous sommes pas encore préoccupé du point de vue *thermodynamique*. Nous allons aborder cette face du problème, et rechercher l'origine de la chaleur solaire.

Cette question s'est imposée lorsque, vers le milieu du siècle dernier, on est arrivé à se rendre compte de la quantité énorme de chaleur que le Soleil perd par an. Les différentes mesures que l'on possède de la *constante solaire*, c'est-à-dire de la quantité d'énergie rayonnée par le Soleil, sont loin d'être d'accord; mais les nombres, tout en variant du simple au double, nous renseignent sur l'ordre de grandeur de cette quantité d'énergie. Nous adopterons ici les chiffres de Pouillet bien qu'ils paraissent un peu trop faibles.

Un mètre carré de surface terrestre, exposé normalement aux rayons du Soleil, reçoit de cet astre une quantité de chaleur égale à 0,3 grande calorie par seconde. En multipliant ce chiffre par le rapport du carré de la distance du Soleil à la Terre au carré du rayon du Soleil, on trouve que, de chaque mètre carré de surface du Soleil, il sort par seconde 13900 grandes calories : cela représente une perte de 6 millions de kilogrammètres par mètre carré de surface solaire et par seconde. En multipliant le chiffre 13900 par la surface du Soleil, évaluée en mètres carrés, et par le nombre de secondes contenues dans une année, on trouve que le Soleil perd $2,7.10^{30}$ grandes calories par an.

Si nous supposions que le Soleil a la même chaleur spécifique que l'eau, il serait aisé de calculer de combien s'abaissera par an la tem-

pérature du Soleil par suite de cette perte de chaleur, à supposer que cette chaleur ne se renouvelle pas. Il suffirait de diviser le chiffre précédent $2,7.10^{30}$ par la masse du Soleil en kilogrammes $1,9.10^{30}$: on trouverait ainsi 1°4 comme taux actuel du refroidissement annuel. Or, la température actuelle du Soleil, d'après les mesures les plus récentes, est généralement évaluée à 6 000° environ. Donc, si la chaleur solaire ne se renouvelait pas par quelque procédé, nous arriverions à cette conclusion qu'avant 6000 ans d'ici le Soleil serait gelé. Mais il faut observer que la température de 6 000° est celle de la photosphère du Soleil, et tout nous porte à croire que l'intérieur de l'astre est incomparablement plus chaud, la température augmentant rapidement avec la profondeur. La photosphère serait donc maintenue à une température voisine de 6 000° par des courants de convection qui lui améneraient constamment de la chaleur empruntée aux couches plus profondes et plus chaudes de façon à compenser les pertes dues au rayonnement. La chaleur rayonnée serait donc, en dernière analyse, prise à la masse solaire interne, et ce serait l'intérieur du Soleil qui verrait sa température s'abaisser.

Quoi qu'il en soit, le Soleil ne contient pas une provision de chaleur indéfinie et il perd annuellement une quantité de chaleur considérable. La plus grande partie de cette chaleur se dissipe dans l'espace céleste et est entièrement perdue. Ce n'est qu'une très faible portion de l'énergie rayonnée qui est reçue et utilisée par les planètes. Ne pourrait-on pas supposer que le rayonnement ne peut se faire qu'entre deux corps matériels différents, et que, par conséquent, dans les directions où l'on ne rencontre aucune matière pondérable, il ne se produit pas de rayonnement? Dans cette hypothèse, un corps absolument seul dans l'espace ne rayonnerait pas, ne trouvant aucun autre corps avec lequel il puisse échanger son énergie. Le Soleil ne rayonnant que dans les directions des planètes ne perdrait pas beaucoup d'énergie. Cette hypothèse permettrait donc de prolonger énormément, dans le passé comme dans l'avenir, la durée d'existence du Soleil en tant que source de chaleur. Malheureusement, malgré son ingéniosité, cette hypothèse est à rejeter, car au moment où l'énergie *quitte* le Soleil, elle ne peut évidemment pas deviner si elle rencontrera ou non une planète.

Force nous est donc d'admettre que la chaleur solaire se dissipe dans tous les sens. Puisque ce rayonnement s'est effectué sans très

grands changements pendant les temps historiques et probablement aussi pendant une très grande partie des temps géologiques, nous devons en conclure que le Soleil n'est pas simplement assimilable à un corps chaud qui se refroidit, mais que sa chaleur se renouvelle et s'entretient par un procédé quelconque. Un problème se pose donc : Quelle est l'origine de la chaleur solaire?

140. *Hypothèse chimique*. — La première idée qui se présente à l'esprit est que, dans le Soleil, la chaleur est peut-être entretenue chimiquement comme dans nos foyers. Mais c'est une hypothèse tout à fait insuffisante, car elle ne permet d'attribuer au rayonnement solaire qu'une durée fort limitée. Un kilogramme de charbon en brûlant dans l'oxygène dégage 8000 calories. On en déduit immédiatement qu'un bloc de charbon d'une masse égale à celle du Soleil, s'il dégageait par an un nombre de calories égal à $2,7.10^{30}$, serait entièrement consumé en 5600 ans. En supposant le Soleil formé par un mélange détonnant d'hydrogène et d'oxygène, ou par un bloc de coton-poudre brûlant par sa surface sans déflagrer, on trouverait un nombre d'années plus grand, mais du même ordre de grandeur, c'est-à-dire encore beaucoup trop petit.

L'hypothèse chimique est donc à rejeter et nous sommes amené, avec Lord Kelvin (¹), à examiner si des hypothèses mécaniques ne seraient pas plus satisfaisantes.

141. *Hypothèse météorique*. — D'après l'hypothèse météorique, dont la première idée remonte à Robert Mayer, la chaleur du Soleil serait entretenue incessamment par les météores qui tombent sur cet astre, la force vive de ceux-ci se transformant en chaleur. Un météore venant de l'infini sans vitesse initiale et tombant en ligne droite sur le Soleil, posséderait en arrivant à sa surface une vitesse de 624 kilomètres par seconde. La chute d'un kilogramme de matière représente, avec cette vitesse, 2.10^{10} kilogrammètres (²). Or, le Soleil perd 6.10^{6}

(¹) Voir Sir William Thomson (Lord Kelvin) : *Constitution de la matière* (Conférences scientifiques et Allocutions, traduction de P. Lugol, avec des Notes de M. Brillouin, Gauthier-Villars, 1893 ; p. 225-276). Sur les matières de ce Chapitre, on peut voir aussi J. Bosler : *Les Théories modernes du Soleil* (Encyclopédie scientifique, O. Doin, 1910), Chap. III et IV.

(²) La combustion de 1 kilogramme de charbon ne dégage que 8000 calories dont l'équivalent mécanique, $3,4.10^{6}$ kilogrammètres, ne représente que $\frac{1}{6000}$ du

kilogrammètres par mètre carré et par seconde. Si l'on veut que la chaleur engendrée par la chute des météores compense la chaleur radiée, il faut faire tomber à la surface du Soleil 0,3 gramme de matière par mètre carré et par seconde, soit 1 kilogramme par mètre carré et par heure. Avec la densité de l'eau, une telle pluie météorique roduirait en un an à la surface du Soleil une couche d'environ cmètres d'épaisseur. L'augmentation qui en résulterait pour le diamètre solaire serait absolument inappréciable à nos procédés de mesure, et rien ne pourrait nous la révéler.

142. Mais il y a une autre difficulté. Ce bombardement météorique accroîtrait sans cesse la masse du Soleil, et une augmentation de la durée de l'année en résulterait. La troisième loi de KÉPLER donne en effet

$$\omega^2 a^3 = \mathrm{M},$$

M désignant la masse du Soleil, ω la vitesse angulaire de la Terre sur son orbite et a le rayon de cette orbite. D'ailleurs, la force étant toujours centrale, la constante des aires C ne varie pas ; nous avons donc

$$\omega a^2 = \mathrm{C}.$$

De ces deux équations nous tirons

$$\omega = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{C}^3};$$

la vitesse angulaire de révolution de la Terre varie donc comme le carré de la masse du Soleil.

Or, la pluie de $0^{gr},3$ de matière par mètre carré et par seconde accroîtrait en un an la masse du soleil d'environ $\frac{1}{32\,000\,000}$ de sa valeur. La masse du Soleil pourrait donc être représentée par l'expression

$$\mathrm{M}\left(1 + \frac{t}{32.10^6}\right),$$

où t désigne le temps en années.

Soit l la longitude moyenne de la Terre, nous avons

$$\omega = \frac{dl}{dt};$$

---

chiffre précédent : on conçoit donc la supériorité des théories mécaniques sur les théories chimiques.

cette quantité est proportionnelle au carré de la masse du Soleil, c'est-à-dire à

$$\left(1 + \frac{t}{32.10^6}\right)^2 = 1 + \frac{2t}{32.10^6}.$$

Nous pouvons donc écrire (à un facteur constant près)

$$\frac{dl}{dt} = 1 + \frac{2t}{32.10^6},$$

d'où

$$l = t + \frac{t^2}{32.10^6}.$$

Si nous faisons

$$t = 4000 \text{ années},$$

il vient

$$l = 4000 + \frac{1}{2}.$$

En 4 000 années (de nos années actuelles), la Terre aurait donc parcouru, non pas 4 000 circonférences, mais $\left(4000 + \frac{1}{2}\right)$ circonférences. Par suite, il y aurait, en 4000 ans, une différence de six mois sur l'époque. Or, il est bien certain que depuis les temps historiques une telle différence ne s'est pas produite. La masse du Soleil n'a donc pas pu varier sensiblement depuis 4 000 ans.

143. Dans le calcul précédent, on a supposé que les météores tombent de l'infini sur le Soleil. On pourrait supposer aussi que les météores, dès l'origine voisins du Soleil, décrivent autour de cet astre des orbites à peu près circulaires, formant comme un essaim autour de lui. Alors, étant intérieurs à l'orbite terrestre, ces météores attireraient la Terre. Lorsqu'ils tomberaient sur le Soleil, l'attraction exercée sur la Terre resterait la même. On peut donc dire que leur chute sur le Soleil ne produirait pas d'accroissement de la masse de cet astre, *en tant que cette masse attire la Terre*; partant, la longueur de l'année ne varierait pas.

Mais, pour que ces météores, décrivant des orbites circulaires, puissent tomber sur le Soleil, il faut qu'ils se meuvent dans un milieu résistant, ou bien qu'ils soient suffisamment nombreux pour se choquer assez souvent.

On sait que la vitesse qui correspond à la trajectoire circulaire est à la vitesse *parabolique* dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$. La force vive d'un météore qui tombe sur le Soleil par spirales de plus en plus serrées est donc deux fois moindre qu'elle ne serait, si le même météore tombait en ligne droite de l'infini. Il faudra donc, dans l'hypothèse actuelle, deux fois plus de matière pour produire le même effet. Au lieu d'admettre que la pluie météorique augmente le rayon du Soleil de 10 mètres par an, il faudra admettre qu'elle l'augmente de 20 mètres, soit une augmentation de 1 kilomètre en 50 ans. A ce taux le diamètre apparent du Soleil croîtrait de $1''$ d'arc en 4 000 ans, ce qui, bien entendu, est tout à fait inappréciable.

On peut penser que la lumière zodiacale est constituée par un tel essaim de météores ; ces météores tombant peu à peu sur le Soleil, entretiendraient sa chaleur. En attribuant à la lumière zodiacale une masse égale à cent fois celle de la Terre, on trouve que la chute de sa matière sur le Soleil pourrait entretenir le rayonnement de cet astre pendant 4 700 ans, chiffre bien faible.

Lord Kelvin se demande aussi quel effet la chute de ces météores produit sur la rotation du Soleil. Si l'on admet, dit-il, que les météores se meuvent tous dans le sens direct et dans le plan de l'équateur solaire, on trouve que la durée de leur révolution est devenue moindre que 25 jours, lorsque leur orbite n'a plus pour rayon que le rayon du Soleil ; par conséquent, en tombant tangentiellement sur le Soleil, ces météores doivent augmenter sa rotation. Lord Kelvin voit là une origine possible de la rotation du Soleil [1], car cet astre aurait pu acquérir ainsi en 25 000 ans sa vitesse de rotation actuelle. Mais rien ne prouve que les météores circulent tous dans le même sens, ni qu'ils soient orientés dans un même plan.

144. Une grave objection à la théorie météorique telle que nous venons de l'exposer vient de l'étude spectroscopique. Un météore arrivant à toucher le Soleil se volatilise, mais il conserve néanmoins son énorme vitesse orbitale. D'après le principe de Döppler-Fizeau, ce phénomène devrait se traduire par un déplacement des raies

---

[1] Rappelons que, dans la théorie de Laplace, c'était plutôt la rotation solaire qui était primitive par rapport à la révolution des planètes. Ici ce serait, au contraire, la révolution des corpuscules qui aurait engendré la rotation de l'astre central.

spectrales; or, le spectroscope ne révèle aucune déviation de ces raies.

En outre, nous avons dit (n° **140**) que l'accroissement de la masse du Soleil aurait pour conséquence une variation de la durée de l'année, si l'on ne supposait pas que l'essaim de météores est intérieur à l'orbite terrestre. Comme la durée de révolution de Mercure n'a pas varié non plus, il faut supposer que l'essaim est même intérieur à l'orbite de Mercure. La densité de ce nuage cosmique devrait donc être assez forte, et les comètes devraient être arrêtées ou tout au moins fortement retardées à leur passage au périhélie; or, même pour les comètes passant à une distance de la surface du Soleil inférieure au rayon de cet astre, il n'y a ni arrêt, ni retard très appréciable.

Il y a donc lieu de rejeter l'hypothèse météorique, ou tout au moins de la modifier profondément, comme l'a fait Helmholtz. Ce sont les idées de Helmholtz que Lord Kelvin, abandonnant lui-même sa première hypothèse, a, dans la suite, adoptées et développées.

145. *Hypothèse de* Helmholtz. — Dans l'hypothèse de Helmholtz, ce ne sont pas des météores distincts qui tombent continuellement sur le Soleil et le réchauffent. L'origine de l'énergie rayonnée par le Soleil est toute différente. Le Soleil est considéré comme une masse fluide qui se contracte. La contraction rapproche les particules les unes des autres; dans ce rapprochement, le travail de la gravitation est positif.

L'énergie potentielle d'une sphère gravitante est

$$\frac{1}{2}\int V\,dm,$$

dm représentant un élément de masse et V le potentiel auquel est soumis cet élément. On a

$$V = \int \frac{dm'}{r},$$

dm' représentant une masse attirante élémentaire et r la distance de la masse attirante dm' à la masse attirée dm.

Si l'on a une sphère homogène de densité ρ, de rayon R et de masse M, une couche sphérique de rayon a et d'épaisseur da a pour masse

$$dm = \rho 4\pi a^2 da.$$

Quel est le potentiel V auquel est soumise cette masse dm? A l'intérieur de la sphère homogène l'attraction est proportionnelle à la distance au centre ; elle a pour valeur

$$\frac{Ma}{R^3}$$

à la distance a du centre : on a donc

$$\frac{dV}{da} = -\frac{Ma}{R^3};$$

d'où l'on tire

$$V = C - \frac{Ma^2}{2R^3},$$

Comme, pour $a = R$, on doit avoir $V = \frac{M}{R}$, il est facile de calculer la valeur de la constante C. Remplaçant alors C par sa valeur on a

$$V = \frac{3M}{2R} - \frac{Ma^2}{2R^3}.$$

L'énergie de gravitation de la sphère est donc

$$\frac{1}{2}\int V dm = 2\pi\rho M \int_0^R \left(\frac{3}{2R} - \frac{a^2}{2R^3}\right) a^2 da$$

$$= 2\pi\rho M \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{10}\right),$$

elle est proportionnelle à

$$\rho MR^2;$$

et, comme on a

$$4\pi\rho R^3 = M,$$

on peut dire que l'énergie est proportionnelle à

$$\frac{M^2}{R}.$$

Donc, si R diminue, le travail est positif : une sphère gravitante homogène qui se contracte en restant homogène fournit de l'énergie. Helmholtz a calculé que, si la densité était uniforme dans tout le Soleil, une contraction de $\frac{1}{1000}$ en diamètre fournirait un travail égal

à 20000 fois l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur qui représente le rayonnement annuel. Bien que le Soleil ne soit pas homogène, on conçoit qu'un processus analogue puisse mettre en jeu la chaleur nécessaire à son rayonnement.

146. On peut aussi, dans le même ordre d'idées, essayer de calculer la provision de chaleur ou d'énergie emmagasinée par le Soleil lors de sa formation et d'évaluer le temps pendant lequel il a pu rayonner au taux actuel de sa déperdition de chaleur. Nous supposerons que le Soleil et sa chaleur ont été engendrés par de petits corps, primitivement séparés les uns des autres par de très grandes distances et tombant les uns sur les autres, la quantité de chaleur totale produite étant équivalente au travail positif ainsi produit.

Considérons la sphère solaire comme formée de couches sphériques concentriques homogènes. Appelons ρ la densité à la distance r du centre, M la masse de la matière solaire intérieure à la sphère de rayon r et W l'énergie emmagasinée par cette même matière, autrement dit le travail que produirait cette matière, d'abord disséminée à l'infini, en se condensant jusqu'à son état actuel. M, W et ρ sont donc des fonctions de r.

Si nous donnons à r l'accroissement dr, M s'accroît de

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Pour calculer dW, accroissement correspondant de W, nous devons supposer que la masse dM tombe de l'infini à la surface de la sphère de rayon r, passant ainsi du potentiel o au potentiel $\frac{M}{r}$: nous avons donc

$$dW = \frac{MdM}{r}.$$

Supposons d'abord, pour simplifier, la densité ρ constante. Dans ce cas, l'intégration se fait immédiatement : on a

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3,$$

$$dW = \frac{4}{3}\pi\rho r^2 . 4\pi\rho r^2 dr$$

$$= \frac{(4\pi\rho)^2}{3} r^4 dr,$$

d'où

$$W = \frac{(4\pi\rho)^2}{3} \cdot \frac{r^5}{5}$$
$$= \frac{3}{5}\frac{M^2}{r}.$$

Si nous appelons R le rayon du Soleil, l'énergie que cet astre a emmagasinée en se formant est donc

$$\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}.$$

Pendant combien de temps cette énergie peut-elle suffire à entretenir la chaleur solaire au taux actuel de la radiation ? Nous avons dit (n° **142**) que la chaleur perdue annuellement par le Soleil est équivalente à l'énergie que lui fournirait une pluie de matière tombant de l'infini sur sa surface et augmentant sa masse de $\frac{1}{32\,000\,000}$ de sa valeur :

$$dM = \frac{M}{32\,000\,000};$$

cette pluie augmenterait W de

$$dW = \frac{M\,dM}{R}$$
$$= \frac{M^2}{R}\frac{1}{32.\,10^6}.$$

Telle est la quantité d'énergie que le Soleil perd par an. Comme, d'autre part, celle qu'il a emmagasinée à l'origne est

$$\frac{3}{5}\frac{M^2}{R},$$

le Soleil ne peut pas rayonner, au taux actuel, depuis plus de

$$\frac{\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}}{\frac{1}{32.10^6}\frac{M^2}{R}} = 19 \text{ millions}$$

d'années environ. Ce calcul est relatif au passé, puisque, dans l'avenir, le Soleil peut continuer à se contracter en dégageant de nouvelles quantités de chaleur.

147. Mais nous avons, dans le calcul, supposé constante la densité ρ. Cette simplification n'est pas légitime, car il est bien certain que dans le Soleil la densité croît à mesure qu'on se rapproche du centre. Admettons donc que la densité ρ soit représentée, en fonction de la distance r au centre, par la loi suivante :

$$\rho = ar^{-\alpha},$$

a et α étant deux constantes positives [1]. Les formules trouvées précédemment (n° **146**) nous donnent alors

$$dM = 4\pi a\, r^{2-\alpha} dr\,;$$

d'où

$$M = 4\pi a \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\,;$$

$$dW = \frac{M}{r}\, dM$$

$$= \frac{(4\pi a)^2}{3-\alpha}\, r^{4-2\alpha} dr,$$

par suite

$$W = \frac{(4\pi a)^2}{3-\alpha} \frac{r^{5-2\alpha}}{5-2\alpha}\,;$$

cette dernière égalité peut s'écrire

$$W = \frac{M^2}{r} \frac{3-\alpha}{5-2\alpha}.$$

Dans cette hypothèse, l'énergie emmagasinée par le Soleil lors de sa formation est donc

$$\frac{M^2}{R} \frac{3-\alpha}{5-2\alpha}\,;$$

par suite le Soleil ne peut pas rayonner depuis plus de

(1) $$\frac{3-\alpha}{5-2\alpha} \cdot 32 \cdot 10^6$$

années.

---

[1] Cette loi donnerait $\rho = \infty$ au centre du Soleil : elle n'est donc qu'une approximation, de laquelle la réalité peut se rapprocher plus ou moins.

Si nous supposons, à titre d'approximation, que la matière solaire est un gaz qui suit la loi de Mariotte, la pression p devra être proportionnelle à ρ. L'équation de l'Hydrostatique (équation d'Euler) donne

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{M}{r^2}.$$

Or,

$$\rho \text{ est proportionnel à } r^{-\alpha},$$

$$M \text{ est proportionnel à } r^{3-\alpha},$$

donc

$$\frac{dp}{dr} \text{ est proportionnel à } r^{1-2\alpha},$$

$$p \text{ est proportionnel à } r^{2-2\alpha}.$$

Nous voulons que p soit proportionnel à ρ, c'est-à-dire à $r^{-\alpha}$. Nous devons donc poser

$$2 - 2\alpha = -\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 2,$$

Alors l'expression (1) donne, pour l'âge du rayonnement solaire, 32 millions d'années.

Cette durée calculée du rayonnement serait un *maximum*. Elle est d'autant plus longue que l'on suppose plus grande la condensation centrale du Soleil, mais, quoi qu'on fasse, elle est toujours du même ordre de grandeur. En mettant les choses au mieux, le Soleil n'aurait donc pas, d'après la théorie de Helmholtz, illuminé la Terre pendant 50 millions d'années.

148. *Étude de la chaleur spécifique.* — Nous avons dit (n° **139**) qu'en supposant au Soleil une chaleur spécifique égale à celle de l'eau, son rayonnement abaisserait (si la chaleur ne se renouvelait pas) sa température à 1°4 par an. Ce chiffre est évidemment beaucoup trop fort, et tout fait penser, au contraire, que la température du Soleil n'a que bien peu varié depuis des temps très reculés. Tout se passe donc comme si le Soleil possédait une chaleur spécifique très considérable, celle-ci pouvant être due à l'énormité des pressions qui existent à l'intérieur.

Étudions la question au point de vue de la Thermodynamique.

Nous assimilerons tout d'abord le Soleil à un fluide parfait, c'est-à-dire que nous supposerons en tout point la pression p uniforme et normale à l'élément plan qu'elle sollicite. Considérons un élément de volume

$$d\tau = dx\,dy\,dz\;;$$

appelons ρ sa densité, X, Y, Z les composantes de la force (rapportée à l'unité de masse) qui lui est appliquée. Dans un déplacement virtuel $(\delta x, \delta y, \delta z)$ subi par cet élément, les forces accomplissent un travail

$$(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,\rho\,d\tau\;;$$

et, pour tout l'ensemble de la masse fluide, le travail accompli dans un déplacement virtuel a pour valeur

$$\delta W = \iiint (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,\rho\,d\tau.$$

Les équations de l'Hydrostatique donnent

$$\frac{dp}{dx} = \rho X,$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y,$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z\;;$$

nous pouvons transformer δW par des intégrations par parties : nous avons par exemple

$$\iiint X\,\delta x\,\rho\,d\tau = \iiint \delta x \frac{dp}{dx}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint \delta x\,p\,dy\,dz - \iiint p\,\frac{d\,.\,\delta x}{dx}\,d\tau\;;$$

or, l'intégrale double est nulle parce que la pression p est nulle à la surface libre du fluide. Il reste donc

$$\delta W = -\iiint p\left(\frac{d\,.\,\delta x}{dx} + \frac{d\,.\,\delta y}{dy} + \frac{d\,.\,\delta z}{dz}\right)d\tau\;;$$

d'ailleurs, comme l'équation de continuité donne

$$\frac{d.\delta x}{dx}+\frac{d.\delta y}{dy}+\frac{d.\delta z}{dz}=-\frac{\delta\rho}{\rho},$$

nous pouvons écrire

$$\delta W=\iiint p\frac{\delta\rho}{\rho}d\tau,$$

ou, en remplaçant dans cette dernière égalité $d\tau$ par $\frac{dm}{\rho}$, dm étant un élément de masse,

$$\delta W=\iiint p\frac{\delta\rho}{\rho^2}dm.$$

Appelant v le volume spécifique, nous avons

$$\frac{1}{\rho}=v,$$

d'où

$$\frac{\delta\rho}{\rho^2}=-\delta v;$$

par suite

$$\delta W=-\iiint p\,\delta v\,dm.$$

Chaque élément de masse dm figure donc, dans la sommation, pour la quantité de travail

$$p\,\delta v\,dm,$$

soit

$$p\,\delta v$$

par unité de masse.

Appelons U l'énergie interne par unité de masse et δQ la quantité de chaleur fournie, également par unité de masse, dans la modification virtuelle envisagée. L'équation fondamentale de la Thermodynamique [1] donne

$$\delta Q=\delta U+p\,\delta v.$$

---

[1] Cette équation traduit le *principe d'équivalence* : la chaleur reçue par un corps (ou un système de corps) équivaut à l'accroissement de son énergie interne, augmenté du travail externe qu'il a fourni. Dans cette équation nous ne faisons pas figurer l'équivalent mécanique de la chaleur, parce que nous supposons δQ évalué en unités de travail, comme les quantités du second membre.

La *chaleur spécifique*, dans une modification quelconque, est représentée par le quotient

$$\frac{\delta Q}{\delta T}$$

de la chaleur fournie par l'accroissement de la température absolue T :

$$\frac{\delta Q}{\delta T} = \frac{\delta U}{\delta T} + p\,\frac{\delta v}{\delta T}.$$

Supposons la pression p très grande. Si la modification a lieu *à volume constant*, δv est nul, et la chaleur spécifique se réduit alors à

$$\frac{\delta U}{\delta T}$$

qui généralement est une quantité finie. Mais *à pression constante* (ou plus généralement à volume non constant), le terme

$$p\,\frac{\delta v}{\delta T}$$

peut-être très grand, si $\frac{\delta v}{\delta T}$ n'est pas très petit : il est possible en effet que pour un solide, ou pour un liquide peu compressible, $\frac{\delta v}{\delta T}$ ne soit pas très petit, même sous pression élevée ; toutefois ce n'est pas ce qui arrive dans le cas d'un gaz parfait ([1]). Nous comprenons ainsi comment, sous de fortes pressions, la chaleur spécifique peut atteindre une valeur considérable.

149. Considérons un globe chaud qui rayonnerait, comme le Soleil. Perdant de la chaleur ce globe se contracte et cette contraction tend à le *réchauffer*. L'ensemble du globe va-t-il s'échauffer, va-t-il se refroidir ; sa température va-t-elle croître ou décroître ? C'est une question qui sera discutée plus loin (Section **III**). Faisons cependant la remarque suivante : pour que le globe s'échauffe en perdant de la chaleur, il faut que la chaleur spécifique $\frac{\delta Q}{\delta T}$ soit *né-*

([1]) Pour les gaz parfaits, le coefficient de dilatation à pression constante $\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta T}$ est constant $\left(\text{et égal à } \frac{1}{273}\right)$: quand la pression devient très grande, le volume spécifique v devient très petit, par suite $\frac{\delta v}{\delta T}$ le devient aussi. Pour un gaz parfait, la chaleur spécifique resterait donc finie sous les fortes pressions. Mais il n'en est pas ainsi pour les solides ou les liquides, ni même pour les gaz naturels.

gative; nous verrons plus loin que cela n'a rien d'impossible. Il peut donc arriver ou que le globe s'échauffe, ou qu'il ne se refroidisse que très lentement si l'effet de la contraction, en accroissant la pression, est d'augmenter la chaleur spécifique.

150. Précédemment (n° **148**), nous avons assimilé le Soleil à un fluide parfait. Si nous l'assimilions maintenant à un solide élastique parfait, la même analyse et les mêmes résultats subsisteraient à peu de modifications près. Nous aurions, au lieu d'une seule pression p en chaque point, à considérer les composantes de la pression, bien connues dans la théorie de l'Elasticité,

$$\begin{array}{lll} p_{xx}, & p_{xy}, & p_{xz}, \\ p_{yx}, & p_{yy}, & p_{yz}, \\ p_{zx}, & p_{zy}, & p_{zz}; \end{array}$$

ces composantes se réduisent à *six* puisqu'on a

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}.$$

Les équations de l'Elasticité s'écriraient

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\rho X,$$

$$\frac{dp_{yx}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} = -\rho Y,$$

$$\frac{dp_{zx}}{dx} + \frac{dp_{zy}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = -\rho Z.$$

Le travail

$$\delta W = \iiint (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\rho d\tau,$$

accompli dans une modification virtuelle, prendrait la forme suivante (comme on le voit par des intégrations par parties) :

$$\delta W = \iiint \left[p_{xx} \frac{d.\delta x}{dx} + \ldots + p_{yz}\left(\frac{d.\delta y}{dz} + \frac{d.\delta z}{dy}\right) + \ldots \right] \frac{dm}{\rho},$$

les quatre termes non écrits dans le crochet du second membre se déduisant, par permutation circulaire, des deux termes écrits. Or, la dé-

formation virtuelle est entièrement définie par les six déformations élémentaires (trois dilatations et trois glissements) :

$$T_{xx} = \frac{d.\delta x}{dx}, \qquad T_{yy} = \frac{d.\delta y}{dy}, \qquad T_{zz} = \frac{d.\delta z}{dz},$$

$$T_{yz} = \frac{d.\delta y}{dz} + \frac{d.\delta z}{dy}, \quad T_{zx} = \frac{d.\delta z}{dx} + \frac{d.\delta x}{dz}, \quad T_{xy} = \frac{d.\delta x}{dy} + \frac{d.\delta y}{dx}.$$

L'équation fondamentale de la Thermodynamique s'écrirait

$$\delta Q = \delta U - p_{xx}\frac{T_{xx}}{\rho} - \dots - p_{yz}\frac{T_{yz}}{\rho} - \dots;$$

l'ensemble des six derniers termes du second membre, représentant ici le travail externe [1], joue le rôle que jouait le seul terme $p\delta v$ dans le cas du fluide parfait. Ces six termes peuvent acquérir des valeurs très considérables à l'intérieur de la masse où les pressions sont énormes. Nous retrouvons donc bien le même résultat : la chaleur spécifique devient très grande sous les fortes pressions.

151. Si, maintenant, nous supposons le Soleil *visqueux*, ainsi qu'il l'est certainement dans la réalité, sa contraction aura pour effet, non seulement d'augmenter sa chaleur spécifique, mais encore de déterminer une véritable *création* de chaleur, car la contraction fait naître des frottements qui produisent de la chaleur. C'est le travail de la gravitation, ainsi transformé en chaleur par les frottements, qui, d'après Helmholtz, entretient la radiation solaire (n° **145**).

152. Dans l'intérieur du Soleil, en raison de la très haute température, la plupart des corps doivent être chimiquement dissociés. Des courants de convection amènent à la surface les matières de ces corps ; là, trouvant une température moins élevée, elles se recombinent avec dégagement de chaleur ; s'étant ensuite refroidies, ces matières retombent à l'intérieur du Soleil où elles se dissocient de nouveau. On peut concevoir que le même cycle recommence et se poursuive, ce mécanisme permettant à l'énergie emmagasinée *à l'intérieur* du Soleil de venir se dissiper *à sa surface* (sans qu'il y ait là, bien entendu,

---

[1] Rappelons que, dans la notation habituelle de la théorie de l'Elasticité, les pressions sont regardées comme positives si elles correspondent à des tensions et comme négatives si elles correspondent à des compressions : c'est la raison des signes — qui figurent dans δQ.

création de chaleur, puisque ce sont toujours les mêmes corps qui alternativement se dissocient et se recombinent).

La dissociation des matières centrales du Soleil joue le même rôle qu'une augmentation de la chaleur spécifique. En effet, si c est la chaleur spécifique, pour élever de T degrés la température superficielle du Soleil, il faut fournir par unité de masse une quantité de chaleur

$$cT;$$

s'il faut, *en outre*, dissocier cette masse, on devra lui fournir une quantité de chaleur supplémentaire que nous pouvons représenter par

$$\alpha T,$$

α étant positif. La quantité de chaleur fournie en tout sera donc

$$(c + \alpha) T;$$

tout se passe donc comme si la chaleur spécifique avait été $c + \alpha$ au lieu de c.

153. Plus la chaleur spécifique des parties centrales est grande, plus est considérable la provision de chaleur que représente la température du Soleil. Quelle température peut-on assigner au centre du Soleil? Celle de la photosphère est d'environ 6 000°; mais cette température n'est pas celle de toute la masse. Puisque, dans certaines parties de l'atmosphère terrestre, il s'établit une sorte d'équilibre adiabatique, on peut penser que, dans le Soleil, s'établit un régime analogue, les parties les plus comprimées étant les plus chaudes et les parties les moins comprimées, les plus froides. Dans ces conditions, le gradient de la température serait, d'après M. Arrhenius, de 9° par kilomètre pour une atmosphère d'hydrogène (en admettant que l'hydrogène soit devenu monoatomique aux hautes températures qui règnent dans le Soleil). Si l'on admet que ce même gradient se poursuit jusqu'au centre, on trouve 6 millions de degrés comme température centrale du Soleil. Il est inutile d'insister sur tout ce que des évaluations de ce genre présentent d'arbitraire et d'incertain ; mais, bien que la température superficielle soit faible, il n'en est pas moins vrai que la quantité de chaleur contenue dans le Soleil est énorme.

Ces diverses considérations nous montrent que tout a pu se passer comme si la chaleur spécifique du Soleil était très grande ; il en résulte que le Soleil aurait pu emmagasiner une provision de chaleur consi-

dérable, sans que sa température moyenne, et surtout sa température superficielle, seule accessible à l'observation, se soient élevées à des chiffres non admissibles. Mais ce n'est pas là une solution du problème ; si nous admettons que cette provision est due à l'énergie de gravitation, elle se trouve toujours limitée par le calcul de Helmholtz et la difficulté reste entière.

154. Nous avons dit que, d'après Helmholtz et d'après Lord Kelvin, le Soleil n'aurait pas, dans le passé, une durée d'existence atteignant 50 millions d'années [1]. Cette conclusion est-elle acceptable ? La plupart des naturalistes l'ont rejetée absolument, au nom du transformisme, prétendant que l'évolution des espèces a dû exiger des centaines de millions d'années ; il est vrai que cet argument a perdu de sa valeur depuis la découverte, par M. De Vries, des phénomènes de *mutation*. Mais d'autres arguments, moins sujets à de semblables objections, sont tirés des faits géologiques. L'épaisseur des couches déposées depuis que la vie existe à la surface de la Terre (et il est bien difficile d'admettre que la vie ait pu exister sans Soleil) exige, paraît-il, beaucoup plus de 50 millions d'années. L'examen des chaînes de montagnes des temps géologiques entièrement détruites par l'érosion conduit à la même conclusion : on a calculé que, pour raser complètement les Alpes, l'érosion aurait besoin de 27 millions d'années. Or, depuis les temps dévoniens où la vie était déjà ancienne, nous voyons surgir une chaîne pareille aux Alpes, la chaîne calédonienne, puis les phénomènes d'érosion la détruisent ; ensuite la chaîne hercynienne s'élève à son tour et est rasée par l'érosion, puis vient le calme des temps secondaires, et enfin la période tertiaire où se sont formées les Alpes. Les géologues sont donc très à l'étroit avec 50 millions d'années, et ils réclament un temps beaucoup plus long. La difficulté est d'autant plus fâcheuse que Lord Kelvin a calculé aussi combien de temps il a fallu à la Terre elle-même pour se refroidir, et qu'il est arrivé à un chiffre du même ordre que pour l'âge du Soleil.

II. — Chaleur terrestre.

155. Exposons les calculs de Lord Kelvin sur le refroidissement de la Terre. Reprenant une hypothèse faite antérieurement par

[1] Nous verrons un peu plus loin (nº **163**) que la découverte des phénomènes radioactifs fait entrevoir la possibilité d'augmenter de beaucoup cette durée.

Poisson, Lord Kelvin suppose que la Terre aurait autrefois parcouru des espaces chauds où elle aurait pris, dans toute sa masse, une certaine température uniforme, et que, étant arrivée ensuite dans des espaces plus froids, elle aurait commencé à se refroidir. C'est ce refroidissement que nous voulons étudier.

Prenons donc une sphère *homogène* dont la température initiale, à l'époque $t = 0$, est *uniforme* et partout égale à V, et plaçons-la dans un milieu indéfini à température zéro [1]. La sphère va se refroidir par sa surface, celle-ci prenant par hypothèse la même température zéro que le milieu avec lequel elle est en contact.

Comme le rayon de la sphère terrestre est très grand, nous le supposerons infini. Le problème se ramènera ainsi à celui qu'on désigne souvent, d'après Fourier, sous le nom de problème du *mur indéfini* se refroidissant *par contact* : deux milieux I et II sont séparés par un plan ; le milieu I sera la Terre, le milieu II l'espace céleste et le plan sera le plan du sol. Prenons pour axe des x une perpendiculaire à ce plan séparateur, dirigée vers l'intérieur du milieu I, ce plan séparateur ayant alors lui-même pour équation

$$x = 0.$$

Il s'agit de déterminer la température v du milieu I (fonction de x et de t définie pour $x > 0$ et $t > 0$), sachant que pour $t = 0$ cette température est uniforme et égale à V, et que pour $t > 0$ la température superficielle (pour $x = 0$) est $v = 0$.

La fonction v n'est définie que pour $x > 0$, mais nous pourrons compléter sa définition pour $x < 0$, en convenant de prendre pour v une fonction *impaire* de x

$$v(-x) = -v(x);$$

alors la fonction v (si elle est continue) s'annulera bien pour $x = 0$, comme nous le voulons.

L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait v est celle de Fourier

$$\frac{dv}{dt} = k\frac{d^2v}{dx^2},$$

[1] C'est-à-dire que nous prenons pour zéro des températures la température du milieu supposée uniforme et constante.

où k est une constante positive (dépendant de la conductibilité du mur et de sa chaleur spécifique).

Considérons la fonction

$$u = \frac{dv}{dx}.$$

Cette fonction satisfera évidemment à la même équation aux dérivées partielles

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{2}$$

Comme, pour $t = 0$, on a

$$\begin{aligned} v &= V \quad \text{pour } x > 0, \\ v &= -V \quad \text{pour } x < 0; \end{aligned}$$

la fonction u satisfera, pour $t = 0$, aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{pour } x > 0, \\ u &= 0 \quad \text{pour } x < 0, \\ u &= \infty \quad \text{pour } x = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc trouver une fonction u, de x et de t, qui satisfasse à l'équation (2) et qui, pour t tendant vers 0, tende elle-même vers 0 quel que soit x, sauf pour $x = 0$, valeur pour laquelle elle tend vers l'infini. Il est facile de voir que la fonction

$$u = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \tag{3}$$

satisfait à toutes ces conditions, A étant une constante.

On aura alors

$$v = \int_0^x u\,dx = A\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx.$$

Pour déterminer la constante A, nous écrivons que, pour $x = +\infty$, le refroidissement ne s'est pas encore fait sentir et que la température est égale à V :

$$V = A\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}} d\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right);$$

l'intégrale définie du second membre, qui est bien connue, a pour valeur

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4k}} d\xi = \sqrt{\pi k};$$

par conséquent la constante A a pour valeur

$$A = \frac{V}{\sqrt{\pi k}}.$$

La température v a donc pour expression

$$v = \frac{V}{\sqrt{\pi k t}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx.$$

156. La quantité

$$\frac{dv}{dx} = u$$

représente l'inverse du *degré géothermique* : le degré géothermique est la quantité dont il faut s'enfoncer à l'intérieur du sol pour voir croître la température de 1°. La valeur de cette quantité pour $x = 0$ est

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = \frac{A}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{V}{\sqrt{\pi k t}}.$$

Or, pour $x = 0$, c'est-à-dire à la surface du sol, nous connaissons le degré géothermique : il est, en moyenne, égal à 35 mètres environ. Nous connaissons aussi la valeur de k, qui dépend de la chaleur spécifique et de la conductibilité thermique du sol. Mais nous ignorons la valeur de V et celle de t.

La valeur que Lord Kelvin adopte pour k correspond à

$$k = 40,$$

si l'on prend pour unité de temps l'année et pour unité de longueur le mètre. Il vient donc

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = \frac{V}{\sqrt{40\pi t}}$$

$$= \frac{1}{11}\frac{V}{\sqrt{t}}.$$

Faisant

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = \frac{1}{35},$$

nous aurons

$$V = \frac{11}{35}\sqrt{t} \qquad \text{soit} \qquad \frac{3}{10}\sqrt{t}.$$

La température uniforme V à laquelle on doit supposer que la Terre a été initialement chauffée, est donc proportionnelle à la racine carrée du temps t depuis lequel elle se refroidit. Si nous faisons

$$t = 10\,000 \text{ années},$$

nous aurons

$$V = 30^\circ$$

chiffre évidemment trop faible. Si nous faisons

$$t = 100\,000\,000 \text{ d'années},$$

nous aurons

$$V = 3\,000^\circ,$$

température supérieure à la température de fusion de presque tous les corps. On peut penser que les parties profondes de la Terre n'ont pas une température supérieure à celle-là. Dans cette hypothèse, la Terre aurait donc commencé à se refroidir il y a cent millions d'années.

157. Examinons les objections qui pourraient être faites à la théorie précédente. Nous avons (n° **155**) remplacé la sphère terrestre par le mur plan indéfini. Cette simplification est-elle légitime ? La formule (3) montre qu'à chaque époque t, le gradient $\frac{dv}{dx}$ de la température est proportionnel au facteur

$$e^{-\frac{x^2}{4kt}} = e^{-\frac{x^2}{160t}}$$

(en adoptant pour k la valeur correspondant à celle que lui attribue Lord Kelvin). Faisons

$$t = 10^9$$

soit 1 milliard d'années ; à quelle profondeur x faudra-t-il s'enfoncer pour que ce facteur devienne égal à e^{-10} (c'est-à-dire pour que le gra-

dient devienne pratiquement nul)? Pour calculer cette profondeur il faudra écrire

$$e^{-10} = e^{-\frac{x^2}{160 \cdot 10^9}},$$

ce qui donne x^2 de l'ordre de 10^{12} et x de l'ordre de 10^6. Il faudra donc descendre à 1 million de mètres, soit à 1000 kilomètres ou à $\frac{1}{6}$ à peine du rayon terrestre. L'influence de la courbure n'est donc pas très grande et l'assimilation de la sphère au mur plan est assez légitime.

158. Mais d'autres objections auraient plus de portée. Nous avons supposé que la sphère terrestre est partie d'une température uniforme et que le refroidissement a commencé brusquement, la superficie prenant immédiatement et conservant la température zéro du milieu froid dans lequel la sphère arrivait. Actuellement, le refroidissement n'aurait pas encore gagné les parties centrales de la Terre, qui auraient conservé leur température initiale.

On pourrait, au contraire, pour se rapprocher d'un autre problème classique de la théorie analytique de la chaleur, supposer que la sphère est partie d'une distribution initiale *quelconque* des températures, et qu'elle s'est trouvée plongée dans un milieu à température zéro. On sait qu'alors la température v, à une époque quelconque t, peut se représenter par une série de la forme

$$v = c_1 e^{-\alpha_1 t} U_1 + c_2 e^{-\alpha_2 t} U_2 + \ldots + c_n e^{-\alpha_n t} U_n + \ldots,$$

les α étant des constantes positives de plus en plus grandes; les U étant des fonctions dépendant des coordonnées x, y, z du point envisagé, mais ne dépendant pas du temps t; les c étant des coefficients constants dépendant de l'état initial. Les exponentielles décroissent très rapidement quand t augmente, et, au bout d'un certain temps, la seule exponentielle non tout à fait évanouie est la première, celle qui correspond au plus petit des nombres α. Le premier terme

$$c_1 e^{-\alpha_1 t} U_1$$

représente donc l'état *pénultième* de la sphère, état auquel elle arrive assez vite et que nous pouvons par suite supposer atteint actuellement.

Dans le cas actuel, qui est celui de la sphère, ce premier terme

$$e^{-\alpha_1 t} U_1$$

se calcule facilement : la fonction U_1 ne dépend que de la distance r au centre de la sphère. L'équation aux dérivées partielles de Fourier

$$\frac{dv}{dt} = k\Delta v$$

s'écrit alors, v ne dépendant que de r,

$$\frac{dv}{dt} = k\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr}\right).$$

Nous avons, pour cette équation, la solution suivante

$$(4) \qquad v = \mathrm{K}e^{-\alpha t}\frac{\sin \lambda r}{\lambda r},$$

les constantes α et λ étant liées par la relation

$$\alpha = k\lambda^2.$$

Pour déterminer λ nous écrirons, en admettant toujours que le refroidissement se fait par contact, que la superficie de la sphère est à la température zéro. Par suite, en appelant R le rayon de la sphère, on doit avoir

$$\sin \lambda \mathrm{R} = 0.$$

Prenant donc

$$\lambda \mathrm{R} = \pi$$

nous obtiendrons la plus petite valeur de α

$$\alpha = k\frac{\pi^2}{\mathrm{R}^2}.$$

L'état pénultième de la sphère est alors donné par la formule (4). Nous en déduisons, pour le gradient de la température à la surface (pour $r = \mathrm{R}$),

$$-\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\mathrm{R}} = -\mathrm{K}e^{-\alpha t}\frac{\lambda \cos \lambda \mathrm{R}}{\lambda \mathrm{R}} = \mathrm{K}e^{-\alpha t}\frac{1}{\mathrm{R}},$$

d'où

$$K = -R\left(\frac{dv}{dr}\right)_R e^{\alpha t}$$

et

$$K > -R\left(\frac{dv}{dr}\right)_R.$$

Remplaçant $-\left(\frac{dv}{dr}\right)_R$ par $\frac{1}{35}$ (inverse du degré géothermique) et R par 6.10^6 (rayon terrestre), il vient

$$K > \frac{6.10^6}{35} > 17.10^4.$$

Quelle est la température au centre de la sphère terrestre? Nous obtiendrons cette température en faisant $r = 0$ dans la formule (4) :

$$v = Ke^{-\alpha t}.$$

Si, dans cette formule, nous faisions $t = 0$, nous trouverions pour la température initiale au centre

$$v = K > 17.10^4;$$

mais observons que la formule précédente n'est valable que pour l'état pénultième et nullement pour les états voisins de l'état initial.

La rapidité de décroissement de la température avec le temps est mesurée par le coefficient

$$\alpha = k\frac{\pi^2}{R^2} = 40\frac{\pi^2}{(6.10^6)^2}$$
$$= 10^{-11}$$

environ; l'exponentielle décroissante est donc

$$e^{-\alpha t} = e^{-\frac{t}{10^{11}}}.$$

Ainsi, au bout de 100 milliards d'années la température aura décru dans le rapport de e à 1.

Nous nous trouvons donc dans des conditions très différentes de celles où nous étions précédemment (nº **156**). C'est que des hypothèses différentes ont été faites : ici nous supposons que le refroidissement s'effectue depuis longtemps et que l'état pénultième, quasi-

stationnaire, est atteint ; là, au contraire, nous supposions avec Lord Kelvin, que la Terre était partie d'un état initial où la température était uniforme, et que le refroidissement n'avait pas encore eu le temps de gagner le centre. L'une des deux hypothèses n'est pas plus invraisemblable que l'autre.

159. — Jusqu'ici nous avons toujours admis que le refroidissement se faisait par *contact*, c'est-à-dire que la Terre arrivant dans un milieu à température zéro, sa superficie prenait immédiatement et conservait la température zéro de ce milieu. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent et en réalité le refroidissement se fait plutôt par *rayonnement* : la surface de la Terre ne prend pas la température zéro du milieu environnant, mais elle perd par unité de temps une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès v de la température de sa superficie sur celle du milieu ambiant. Ce flux de chaleur perdue étant lui-même proportionnel à la dérivée normale $\frac{dv}{dn}$ de la température, la condition qui doit maintenant être remplie à la surface est

$$\frac{dv}{dn} = hv,$$

h étant une constante. Dans cette nouvelle hypothèse, la superficie n'étant pas à la température zéro, mais à une température supérieure, le refroidissement se fera plus lentement que dans l'ancienne hypothèse.

160. Dans tous les cas, c'est par sa surface que la Terre se refroidit. La croûte superficielle, l'écorce terrestre, se contracte et doit bientôt, semble-t-il, devenir trop petite pour le noyau qu'elle enveloppe. Des *fentes* devraient donc s'y produire, semblables à celles qui, d'après MM. Loewy et Puiseux, existent à la surface de la Lune. Or, ce sont au contraire des couches plissées que les géologues observent dans les régions tourmentées. On est donc porté à croire que la croûte est devenue trop large pour le noyau qu'elle recouvre, et que c'est le noyau qui se contracte plutôt que l'écorce.

Il ne faudrait pas dire : la croûte superficielle recevant de la chaleur du Soleil et le noyau n'en recevant pas, c'est le noyau qui doit se refroidir et non la croûte superficielle. Ce raisonnement serait défectueux, car c'est toujours par la superficie que la chaleur s'échappe.

et les couches internes n'auraient aucune raison de se refroidir si les couches externes ne l'avaient pas fait avant elles.

161. M. Rudzki a calculé ([1]) quelle est la quantité de chaleur perdue par la Terre dans son refroidissement. Soient G le degré géothermique (égal à 35 mètres ou 3 500 centimètres) et k la conductibilité des roches qui forment la surface de la Terre (on a $k = 0{,}00582$ en unités C. G. S., d'après Lord Kelvin). Le flux de chaleur perdu par seconde et par centimètre carré étant $\frac{k}{G}$, on a

$$\frac{k}{G} = \frac{0{,}00582}{3\,500} \text{ calories-grammes,}$$

soit une perte de 52 calories-grammes par centimètre carré et par an.

M. Rudzki cherche aussi ([2]) à se rendre compte de combien le rayon terrestre se raccourcit par suite de la contraction due au refroidissement. Soient μ le coefficient de dilatation linéaire de la Terre, 3μ son coefficient de dilatation cubique et T la température d'un élément de volume $d\tau$. Dans le temps δt, cet élément $d\tau$ voit son volume varier de

$$3\mu \frac{dT}{dt} \delta t \, d\tau.$$

Par conséquent la variation de volume δV de la Terre est

$$\delta V = 3\,\delta t \iiint \mu \frac{dT}{dt} d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume de la Terre. La température T satisfait à l'équation de Fourier

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T.$$

Si l'on admet que μ et a sont des constantes, il vient

$$\delta V = 3\,\delta t \, \mu a \iiint \Delta T \, d\tau$$

$$= 3\,\delta t \, \mu a \iint \frac{dT}{dn} d\tau;$$

([1]) Dr M. P. Rudzki : *Physik der Erde* (Tauchnitz, Leipzig, 1911), p. 118.
([2]) Rudzki : *Loc. cit.*, p. 215-217.

or $\frac{dT}{dn}$ est (au signe près) l'inverse du degré géothermique ; donc

$$\delta V = -3\delta t \mu a \int\int \frac{d\sigma}{G} = -3\delta t \mu a \frac{4\pi R^2}{G},$$

R désignant le rayon terrestre.

Mais d'autre part, on a évidemment

$$\delta V = 4\pi R^2 \delta R.$$

On trouve donc, en égalant ces deux valeurs de δV,

$$\frac{\delta R}{\delta t} = -\frac{3\mu a}{G}.$$

En remplaçant μ et a par les valeurs numériques qui conviennent en moyenne aux roches terrestres, on trouve

$$\frac{\delta R}{\delta t} = -0{,}004 \text{ environ} ;$$

le rayon terrestre se raccourcirait donc de 4 millièmes de centimètre par an.

Ce calcul suppose que μ et a sont des constantes. Il n'en est certainement pas ainsi dans la réalité, surtout pour a qui dépend de la chaleur spécifique. Nous avons exposé plus haut comment le coefficient de dilatation et la chaleur spécifique doivent dépendre de la pression qui est énorme dans les parties centrales.

Certains plis montagneux donnent une idée du rétrécissement de la croûte terrestre et par suite de la diminution du rayon. Comparant les résultats de ses calculs et les résultats donnés par l'observation de ces plis, M. Rudzki croit pouvoir conclure que la Terre se refroidirait depuis 3 milliards d'années.

162. D'autres méthodes ont été proposées pour évaluer l'âge de la Terre.

a) La salure de la mer doit augmenter peu à peu, puisque l'eau qui s'évapore à sa surface est pure, tandis que l'eau que lui apportent les fleuves contient en solution des sels qui ont été dissous dans leur trajet. Évaluant la quantité de sel dont la mer s'enrichit ainsi par an, M. Joly a calculé qu'elle a dû mettre 100 millions d'années à atteindre son état de salure actuel.

b) Depuis l'époque cambrienne il a pu se déposer 30000 mètres de sédiments ; or, comme, d'après les géologues, la formation d'un mètre de sédiment exige de 3 000 à 20000 années, il se serait donc écoulé de 90 millions à 600 millions d'années depuis l'époque cambrienne.

c) L'uranium dégage de l'hélium avec une rapidité connue. Mesurant donc la quantité d'hélium contenue dans les roches uranifères, on en a déduit que ces roches pouvaient avoir 400 millions d'années d'existence.

d) Le radium émet constamment de la chaleur en se transformant en émanation : d'après Curie, 1 gramme de radium émet 100 petites calories par heure. N'est-il pas permis de voir là l'origine de ce flux de chaleur que révèle le degré géothermique ? Les roches granitiques renferment une fraction de radium qu'on a évaluée à $4 \cdot 10^{-12}$ de leur masse totale. Si l'on admettait que toute la Terre possède autant de radium, on aurait 74 fois trop de chaleur pour réparer la perte de chaleur due au refroidissement. C'est pourquoi on a proposé, pour rétablir l'équilibre, d'admettre que le radium n'existe que jusqu'à une profondeur de 72 kilomètres.

Il est vrai que le radium ne dure pas très longtemps : en l'espace de 1 200 à 1 900 ans il est presque complètement détruit. On a admis alors que le radium n'est qu'un produit de transformation de l'uranium qui, lui, ne se transforme que très lentement.

163. Les considérations précédentes ont été étendues au Soleil et l'on a proposé d'admettre que l'énergie qu'il rayonne est d'origine radioactive. On pourrait augmenter ainsi dans des proportions considérables la quantité d'énergie que le Soleil contient en réserve, et prolonger de beaucoup sa durée, aussi bien dans le passé que dans l'avenir. Malgré ce que cette théorie a d'hypothétique et de prématuré, elle suffit à nous convaincre que les chiffres de Lord Kelvin et de Helmholtz, qui refusent au Soleil un âge supérieur à 50 millions d'années, ne doivent pas être acceptés sans les plus expresses réserves. Un fait entièrement inconnu de Helmholtz suffit pour que son raisonnement perde sa force probante ; il y a sans doute beaucoup d'autres sources ou réservoirs d'énergie que nous ne pouvons pas plus soupçonner que Helmholtz ne soupçonnait le radium.

III. — Équilibre adiabatique d'un gaz parfait (¹).

164. Nous avons posé (n° **149**) la question suivante : une masse chaude qui rayonne tend à se contracter, la contraction tend à l'échauffer ; la masse va-t-elle finalement s'échauffer ou se refroidir en perdant de la chaleur ? Nous allons approfondir cette question en supposant que la masse est formée par un *gaz parfait en équilibre adiabatique* : nous entendons par là un état tel que l'équilibre des températures ne soit pas altéré par la circulation, sans gain ni perte de chaleur, d'une partie de la matière dans un tube fermé sur lui-même.

La masse gazeuse va prendre évidemment, sous l'action de sa propre gravité, une forme sphérique formée de couches concentriques homogènes. Soient r le rayon d'une couche sphérique d'épaisseur dr, ρ sa densité, M la masse gazeuse intérieure à la sphère de rayon r. Nous aurons

$$(5)\qquad dM = 4\pi r^2 \rho\, dr.$$

Appelant p la pression, l'équation de l'Hydrostatique donne

$$(6)\qquad \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{M}{r^2}.$$

D'ailleurs, puisqu'on suit la loi adiabatique, la pression p est proportionnelle à ρ^γ ($\gamma = \frac{C}{c}$ désignant le rapport des deux chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant) :

$$p = K\rho^\gamma,$$

d'où nous déduisons

$$(7)\qquad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}.$$

Les trois équations (5), (6) et (7) forment un système de trois équations différentielles du premier ordre, propres à déterminer M,

(¹) J. Homer Lane : *On the theoretical temperature of the Sun* (American Journal of Science, juillet 1870, t. 50, p. 57-74).

p et ρ en fonction de r, moyennant les conditions suivantes servant de conditions initiales :

$$\begin{array}{llll} \text{pour } r = R & \text{on devra avoir} & M = M_0 & \text{et} \quad p = 0, \\ \text{pour } r = 0 & \text{on devra avoir} & M = 0\,; & \end{array}$$

R désigne le rayon de la sphère et M_0 la masse totale.

L'intégration s'effectuerait sans difficultés, mais nous n'en avons pas besoin.

Demandons-nous ce qui se passera si la sphère se contracte, c'est-à-dire si l'on fait varier R. Nous allons appliquer le principe de similitude mécanique. Remarquons que si l'on remplace

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} r & \text{par} & \mu r, \\ M & \text{par} & M, \\ p & \text{par} & \mu^{-4} p, \\ \rho & \text{par} & \mu^{-3} \rho, \end{array} \right.$$

les équations (5), (6) et (7) ne changent pas. C'est dire que, si le rayon de la sphère varie, la pression varie comme l'inverse de la quatrième puissance du rayon, et la densité comme l'inverse du cube du rayon (cette variation de la densité était facile à prévoir d'après le principe de conservation de la masse).

Mais comment variera la température T ? L'équation caractéristique des gaz parfaits est [1]

$$pv = RT.$$

Puisque, par la substitution (8), p, se trouve multiplié par μ^{-4} et v par μ^3, T se trouve multiplié par μ^{-1}. La température varie donc *en raison inverse du rayon* : quand la sphère se contracte la température s'élève ; autrement dit, *le coefficient de dilatation est négatif.*

Si l'on avait effectué l'intégration, avec les données relatives au Soleil, on aurait obtenu, en admettant que le Soleil est formé de gaz hydrogène, supposé monoatomique aux hautes températures, les résultats donnés par le Tableau suivant :

---

[1] R désigne, dans cette équation, la constante des gaz parfaits

$$R = C - c\,;$$

la même lettre R désignait plus haut le rayon de notre sphère : aucune confusion n'est à craindre.

Distance au centre en fraction du rayon $\left(\frac{r}{R}\right)$	Densité	Pression en atmosphères	Températures en degrés
0	8,44	8.10^9	24.10^6
0,5	3,54	2.10^9	14.10^6
0,9	0,2	$0{,}017.10^9$	2.10^6

165. Etudions maintenant la *chaleur spécifique* de la masse gazeuse. L'équation fondamentale de la Thermodynamique donne, en appelant dQ la quantité de chaleur que reçoit l'unité de masse,

$$dQ = dU + pdv$$

dU désignant l'augmentation d'énergie interne et pdv le travail externe dû à l'accroissement dv du volume spécifique.

Pour un gaz parfait, on a

$$dU = cdT$$

et d'ailleurs

$$pv = RT = (C - c)T.$$

Dans le cas d'équilibre adiabatique, T varie en raison inverse du rayon, c'est-à-dire qu'il est proportionnel à $v^{-\frac{1}{3}}$: on a donc

$$\frac{dv}{v} = -3\frac{dT}{T};$$

par suite

$$pdv = pv\frac{dv}{v} = -3(C - c)dT.$$

Il vient donc

$$dQ = cdT - 3(C - c)dT.$$

Cela revient à dire que la chaleur spécifique de la masse gazeuze, *dans les conditions d'équilibre adiabatique que nous supposons*, est

$$c - 3(C - c).$$

Son signe dépend de la valeur du rapport $\frac{C}{c}$.

1° Pour les gaz monoatomiques (comme sont l'hélium, la vapeur de mercure, et comme sont probablement tous les gaz aux hautes températures du Soleil), on a

$$\frac{C}{c} = \frac{5}{3};$$

ce qui donne, comme chaleur spécifique de la masse,

$$c\left[1 - 3\left(\frac{5}{3} - 1\right)\right] = -c,$$

quantité *négative*. Donc, quand le gaz rayonnera, c'est-à-dire perdra de la chaleur, sa température *augmentera*. Comme le coefficient de dilatation est aussi négatif, le volume du gaz *diminuera* en même temps.

2° Pour un gaz diatomique, on a

$$\frac{C}{c} = \frac{7}{5},$$

ce qui donne à la chaleur spécifique la valeur

$$-c\left[1 - 3\left(\frac{7}{5} - 1\right)\right] = -\frac{c}{5},$$

quantité encore négative. Nous aurons donc les mêmes conclusions.

3° Pour un gaz triatomique ou polyatomique on trouverait une chaleur spécifique positive : la masse perdant de la chaleur, sa température diminuerait ; mais, le coefficient de dilatation étant négatif, son volume augmenterait en même temps.

166. Telles sont les conclusions, d'allure paradoxale à première vue, auxquelles nous conduit la théorie des gaz parfaits. Il ne faut pas se hâter d'en déduire que ces conclusions sont applicables au Soleil, parce que celui-ci est sans doute fort loin de l'état de gaz parfait.

167. Il est intéressant de retrouver les mêmes résultats en s'appuyant sur la théorie cinétique des gaz. Rappelons-nous que le théorème du viriel (n° **74**) nous a fourni l'équation [1]

$$2T + V = 0, \tag{9}$$

---

[1] Il est bien entendu qu'il ne s'agit ici que de *valeurs moyennes*. Aussi nous dispensons-nous de surmonter d'un trait les lettres T et V.

où T représente la demi-force vive de translation des molécules et V leur viriel. Dans le cas d'un gaz renfermé dans un récipient, le viriel a pour valeur

$$V = -3pv\,;$$

mais lorsqu'il s'agit, comme ici, d'une masse gazeuse *libre* dont les molécules sont soumises à l'attraction newtonienne, le viriel est égal à l'énergie potentielle (n° 76) ; on a donc

$$V = -\sum \frac{mm'}{r},$$

r désignant la distance qui sépare les deux molécules quelconques m et m'.

Supposons que la masse gazeuse reçoive une quantité de chaleur dQ. A ce gain de chaleur, correspond un accroissement de la demi-force vive de translation T et un accroissement de l'énergie potentielle. L'énergie potentielle étant égale au viriel V, nous écrivons

$$dQ = dT + dV. \tag{10}$$

Cette équation n'est exacte que pour un gaz monoatomique, car pour un gaz polyatomique la force vive totale se compose, non seulement de la force vive 2T de translation des molécules, mais encore de la force vive due aux mouvements des atomes d'une même molécule les uns autour des autres. Dans la théorie cinétique des gaz, ces deux sortes de forces vives sont proportionnelles l'une à l'autre, et la demi force vive totale peut s'écrire

$$\mu T,$$

μ désignant un coefficient égal à 1 pour les gaz monoatomiques, supérieur à 1 pour les gaz polyatomiques.

L'équation (10) doit donc être remplacée par la suivante :

$$dQ = \mu dT + dV\,;$$

et comme l'équation (9) du viriel donne

$$2dT + dV = 0,$$

nous aurons

$$dQ = (\mu - 2)\,dT.$$

Comme T est proportionnel à la température absolue, la chaleur spécifique de la masse gazeuse est proportionnelle à

$$\mu - 2.$$

1° Pour un gaz monoatomique, on a

$$\mu = 1, \qquad \mu - 2 = -1.$$

la chaleur spécifique est donc négative.

2° Pour un gaz diatomique, on a

$$\mu = \frac{5}{3}, \qquad \mu - 2 = -\frac{1}{3},$$

la chaleur spécifique est donc encore négative.

3° Pour un gaz triatomique ou polyatomique, on a

$$\mu > 2,$$

la chaleur spécifique est donc positive.

Comparons cette chaleur spécifique de l'ensemble de la masse gazeuse à la chaleur spécifique du gaz *à volume constant*, celle qu'on désigne par c. S'il s'était agi de l'échauffement d'un gaz à volume constant, on aurait eu simplement

$$dQ = \mu dT,$$

c'est-à-dire que le coefficient μ est proportionnel à la chaleur spécifique à volume constant c.

Par suite, la chaleur spécifique de la masse gazeuse libre, comparée à c, a pour valeur

$$\frac{\mu - 2}{\mu} c.$$

Pour les gaz monoatomiques, $\mu = 1$, la chaleur spécifique est $-c$.

Pour les gaz diatomiques, $\mu = \frac{5}{3}$, la chaleur spécifique est $-\frac{c}{5}$.

Nous retrouvons donc, par la théorie cinétique des gaz, exactement les mêmes résultats que par la théorie des gaz parfaits.

Etudions de même le coefficient de dilatation de la masse gazeuse. Si nous changeons r en λr, le viriel

$$V = -\sum \frac{mm'}{r}$$

se trouve multiplié par $\frac{1}{\lambda}$; et l'équation (9) montre que T est aussi multiplié par $\frac{1}{\lambda}$. La température varie donc en raison inverse des dimensions linéaires de la masse, ce qui prouve que le coefficient de dilatation est négatif.

168. Ainsi, une masse gazeuse (monoatomique ou diatomique) entièrement libre, *s'échauffera en se contractant*, à mesure qu'elle perdra de la chaleur par rayonnement : ses molécules, en perdant de l'énergie, verront leur force vive de translation augmenter. On peut comparer ce phénomène à celui qui se produit lorsqu'une planète ou une comète se meut dans un milieu résistant : la perte d'énergie due à la résistance se traduit (voir n° **88**) par une diminution du grand axe de l'orbite (c'est-à-dire de l'énergie potentielle), en même temps qu'augmente la vitesse linéaire (c'est-à-dire l'énergie cinétique de translation).

169. Le même phénomène continuera jusqu'au moment où, par suite de la contraction et du refroidissement de la masse gazeuse, les molécules seront devenues polyatomiques. D'ailleurs, il n'est nullement certain que le raisonnement soit applicable aux gaz monoatomiques, lorsqu'on suppose que ceux-ci subissent les pressions énormes qui règnent à l'intérieur du Soleil : car alors il faudrait, au viriel V, ajouter des termes compliqués provenant des actions interatomiques ; le gaz s'éloignerait de l'état parfait, il se rapprocherait plutôt d'un liquide, et la chaleur spécifique deviendrait sans doute positive.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DE Sir NORMAN LOCKYER.

170. Jusqu'ici, notre horizon n'a guère dépassé le système solaire. Mais la spectroscopie, en faisant naître la Chimie stellaire, a révélé des étoiles de types spectraux très différents, et l'on a été amené à étudier l'évolution de ces astres. Les théories mécaniques ou thermodynamiques font place ici à des théories chimiques.

La théorie de Sir NORMAN LOCKYER sur la genèse des grandes étoiles repose sur l'étude simultanée de la composition chimique de ces astres et des différences de température qu'ils présentent entre eux ([1]).

On sait que le spectre d'un corps incandescent est d'autant plus étendu vers le violet que ce corps est plus chaud : c'est ainsi qu'une barre de fer passe successivement du rouge sombre au blanc éblouissant, à mesure qu'on la chauffe à une température de plus en plus élevée. On sait aussi que le maximum d'éclat du spectre se déplace vers le violet, à mesure que la température de la source lumineuse augmente (loi de WIEN) ; on conçoit donc que l'étude du spectre des étoiles puisse fournir des indications sur la température de ces astres.

Au point de vue des raies, Sir N. LOCKYER distingue parmi les spectres des étoiles trois types différents :

Le spectre de la flamme, qui est un spectre de bandes ;

Le spectre de l'arc, formé par des raies fines ;

Le spectre de l'étincelle, formé par de nouvelles raies et par certaines raies de l'arc *renforcées*.

L'origine de cette distinction est la suivante : Si l'on place un corps successivement dans une flamme et dans l'arc électrique qui est plus

(1) Voir LOCKYER (Sir NORMAN) : *L'Évolution inorganique* (Bibliothèque scientifique internationale, Paris, Alcan 1905). *Further Researches on the temperature classification of Stars* (Proceedings of the Royal Society of London, 1904, vol. LXXIII, p. 227-238).

chaud, on voit le spectre du corps s'enrichir en raies ; si l'on fait éclater l'étincelle entre deux fragments du corps, la température de l'étincelle étant encore supérieure à celle de l'arc, on voit de nouvelles raies apparaître, pendant que certaines des raies de l'arc se *renforcent* et que d'autres disparaissent.

Du fait qu'un même corps (un métal, par exemple) peut, suivant la température à laquelle il est porté, émettre soit les raies de l'arc, soit les raies renforcées ou celles de l'étincelle, Sir N. Lockyer croit pouvoir conclure que le corps s'est transformé ou *dissocié*, aux hautes températures, en corps plus simples qui n'existent pas à l'état libre aux températures usuelles [1]. Il nomme *protométal* la forme atomique du corps qui correspond aux raies de haute température (raies renforcées et raies de l'étincelle). Les protométaux seraient en quelque sorte des métaux en voie de formation, ceux-ci ne prenant naissance que lorsque la température est suffisamment abaissée.

171. Sir N. Lockyer cherche à suivre les transformations graduelles de la matière cosmique, à partir des météorites. Il pense qu'il faut voir dans l'état plus ou moins avancé de l'évolution des astres l'origine des différences que présentent leurs spectres.

Les nébuleuses nous offrent, selon Sir N. Lockyer, le premier stade de l'évolution cosmique. Il les considère comme formées par des essaims de météorites dont les chocs mutuels ont pour effet une condensation et une création de chaleur, produisant le dégagement des gaz inclus dans les météorites qui se heurtent : les gaz qui se dégagent et se répandent le plus facilement étant les plus légers ; on observera surtout les raies brillantes de l'hydrogène et de l'hélium.

La concentration se poursuivant, la nébuleuse se transforme en une étoile qui s'échauffe de plus en plus : les météorites centrales non vaporisées donnent de la lumière continue ; celle-ci traverse l'atmosphère qui contient une faible proportion de vapeurs métalliques : les raies métalliques commencent donc à apparaître sous forme de raies sombres.

Bientôt la température atteint son maximum : les raies de haute

---

[1] Il peut s'agir, suivant les cas, soit d'une simple transformation moléculaire comme celle de l'hydrogène, habituellement diatomique, qui devient monoatomique aux hautes températures ; soit d'une véritable dissociation de l'élément, comme l'hélium qui se séparerait réellement en deux constituants, l'hélium et l'actinium.

température (protométalliques) apparaissent alors dans le spectre et l'emportent sur les autres.

Une fois toutes les météorites vaporisées, le bombardement cesse et un calme relatif lui succède, l'astre va commencer à se refroidir en même temps que vont disparaître, dans l'ordre inverse de leur apparition, les raies de haute température.

Deux étoiles qui paraissent à la même température peuvent donc être à des stades très différents de leur évolution, suivant que leur température croît ou décroît.

172. Sir N. Lockyer a, d'après les idées que nous venons d'exposer, classé les étoiles en un certain nombre de groupes. A chacun de ces groupes, il donne le nom de l'étoile qui lui sert de type, ou celui

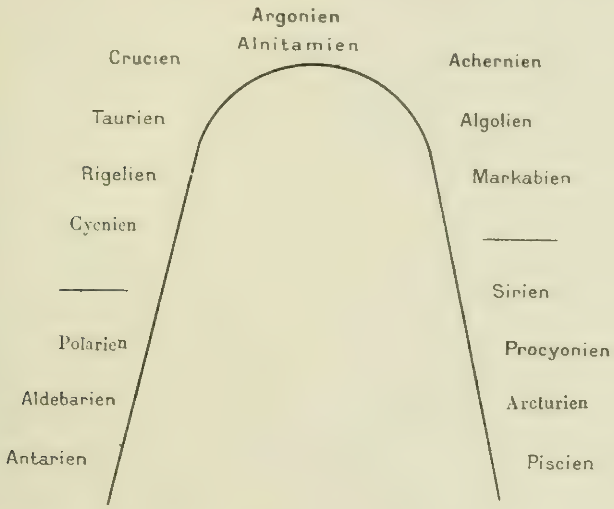


fig. 38.

de la constellation qui renferme cette étoile. Il place ces groupes sur une courbe au sommet de laquelle se trouvent les astres les plus chauds (*fig.* 38).

Les groupes de gauche correspondent à des étoiles dont la température va en s'élevant ; ceux de droite à des étoiles dont dont la température va en s'abaissant.

Au sommet de la courbe, se trouve le type argonien dont le spectre

est caractérisé par les raies du *protohydrogène* (1). Un peu au-dessous sont les types crucien, taurien, algolien, ..., où apparaissent d'abord l'hydrogène et l'hélium (étoiles gazeuses) puis l'oxygène et l'azote. Plus bas (types rigelien, markabien), le spectre présente les raies des protométaux (protocalcium, protomagnésium,....). Plus bas encore, les raies métalliques apparaissent de plus en plus (types cycnien, ..., arcturien) au détriment des raies gazeuses : c'est dans le type arcturien que Sir N. Lockyer place notre Soleil dont le spectre ne présente plus les raies de l'oxygène ni de l'azote. Enfin, tout au bas de l'échelle des températures (types antarien et piscien), on trouve les étoiles à spectre de bandes. Si l'on descendait encore, on trouverait, à gauche les nébuleuses, à droite les étoiles éteintes.

Comment distingue-t-on, par le spectre d'une étoile, si celle-ci doit être rangée sur la branche ascendante ou sur la branche descendante de la courbe des températures ? Il y a sans doute là une certaine part d'arbitraire, puisque, sur la figure 38, deux groupes situés à droite et à gauche sur une même ligne horizontale présentent des spectres assez semblables. Sir N. Lockyer pense néanmoins que certaines raies accessoires peuvent fournir des renseignements à ce sujet : celles des métaux à poids atomiques plus faibles se montreraient de préférence dans les étoiles dont la température s'élève ; celles des métaux à poids atomiques plus forts, dans les étoiles dont la température s'abaisse.

173. La question de la température des étoiles a été reprise récemment à l'Observatoire de Paris par M. Nordmann (2). Il observa le maximum de radiation dans le spectre en admettant, à titre d'approximation, que la loi de radiation est celle des corps noirs. Les chiffres qu'il obtient nous renseignent tout au moins sur l'ordre de grandeur des températures stellaires, et surtout sur le sens dans lequel varie la température d'une étoile à l'autre. Voici les résultats auxquels il est parvenu :

---

(1) Les raies de l'hydrogène forment une série satisfaisant à une formule simple (formule de Balmer) où figure un entier arbitraire n ; si dans cette formule on remplace n par $\frac{2n+1}{2}$ on obtient une seconde série de raies, caractéristiques du protohydrogène.

(2) Ch. Nordmann : *Sur les atmosphères absorbantes et les éclats intrinsèques de quelques étoiles* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 14 mars 1910).

Type antarien	2 870°
Soleil	5 320°
Type aldebarien	4 260°
Type polarien	4 750 à 8 200°
Type procyonien	7 250°
Type sirien.	12 200 à 14 500°
Type algolien	13 300 à 18 500°
Type crucien	15 200°
Type taurien	> 40 000°

On voit que la classification des températures de Sir N. Lokyer n'est pas en complet accord avec les chiffres de M. Nordmann, quoi qu'en gros il y ait une certaine concordance.

174. Sir N. Lockyer a aussi étudié la distribution des étoiles des différents types dans le ciel. Il remarque que les étoiles gazeuses sont plus condensées vers le plan de la Voie lactée que vers les pôles de ce plan ; ces étoiles gazeuses ont, en moyenne, un mouvement propre plus petit que les étoiles métalliques : faut-il en conclure que les étoiles métalliques sont moins éloignées de nous que les étoiles gazeuses ? Remarquons plutôt que ce résultat n'a rien de surprenant, car les étoiles gazeuses étant plus brillantes que les autres sont vues de plus loin : à égalité de grandeur elles doivent donc, en moyenne, être plus éloignées et par suite offrir un moindre mouvement propre.

On peut tenter d'expliquer d'une façon analogue l'accumulation des étoiles gazeuses dans le plan de la Voie lactée. Si la Voie lactée a la forme d'un disque très aplati, les étoiles tendront à se concentrer dans le plan de ce disque et *cela d'autant plus qu'elles seront plus éloignées* ; les étoiles gazeuses, plus éloignées en moyenne, doivent donc présenter une plus grande tendance à la concentration. On peut dire aussi que, si l'on rencontre plus d'étoiles chaudes dans le plan galactique que dans les autres parties du Ciel, c'est que c'est dans ce plan que les chances de collisions sont les plus nombreuses. C'est pour cette même raison que les *Novae* apparaissent de préférence dans la Voie lactée.

CHAPITRE X.

THÉORIE DE M. SCHUSTER.

175. M. Schuster ([1]) apporte plusieurs modifications à la théorie de Sir Norman Lockyer sur l'évolution des étoiles. Il se demande pourquoi les étoiles dites gazeuses sont plus chaudes que les autres : ont-elles une atmosphère d'hydrogène parce qu'elles sont plus chaudes ; sont-elles au contraire plus chaudes parce qu'elles ont une atmosphère d'hydrogène ? Il semble qu'on puisse supposer que l'atmosphère d'hydrogène absorbe et arrête les radiations infrarouges, c'est-à-dire les radiations calorifiques. Une étoile à atmosphère d'hydrogène, dans ces conditions, perdrait moins de chaleur et par suite resterait plus chaude. L'atmosphère de l'étoile jouerait ainsi, en quelque sorte, le rôle d'une serre chaude, laissant passer les rayons lumineux, mais arrêtant la chaleur obscure.

Pour M. Schuster, les étoiles gazeuses sont, non seulement plus chaudes, mais aussi plus jeunes que les autres. Or, nous avons vu (Ch. VIII, Section **III** que, pour une masse gazeuse en équilibre adiabatique rayonnant de la chaleur, la température doit aller en croissant avec le temps, fait qui tendrait plutôt à prouver que les étoiles chaudes sont les plus anciennes. D'après M. Schuster, ce n'est là qu'une contradiction apparente : la température observée est celle de la photosphère de l'étoile et non celle de son noyau ; les étoiles gazeuses auraient une photosphère plus chaude, mais leurs parties centrales seraient à une température moins élevée.

176. D'où provient maintenant la différence entre les spectres des étoiles gazeuses (étoiles à hydrogène) et les spectres des étoiles moins chaudes (étoiles à raies métalliques). La solution la plus simple est

([1]) A. Schuster : *The Evolution of Solar Stars* (Astrophysical Journal, 1903, vol. XVII, p. 165-200).

évidemment d'admettre que les premières sont principalement constituées par de l'hydrogène et les secondes par des vapeurs métalliques. Nous avons vu que tel n'est pas l'avis de Sir N. LOCKYER : celui-ci, invoquant sa théorie de la dissociation des éléments, admet qu'il n'y a pas de différence essentielle de composition chimique entre les astres, et que toutes les étoiles, dans leur évolution, sont destinées à parcourir les mêmes stades.

M. SCHUSTER, au contraire, ne pense pas que les éléments chimiques soient dissociés. Il suppose, il est vrai, que les différentes étoiles ont même composition chimique *moyenne*. S'il n'y a pas de courants de convection, l'hydrogène, plus léger, apparaîtra à la surface (étoiles gazeuses); si, au contraire, des courants de convection produisent un brassage continuel, les vapeurs métalliques seront amenées dans les régions superficielles (étoiles métalliques).

177. Voici donc comment M. SCHUSTER se représente l'histoire des grandes étoiles. La matière serait à l'origine répandue dans tout l'espace. Les chocs de ses diverses parties engendreraient de la chaleur en même temps qu'ils donneraient naissance à certains centres de condensation. L'attraction de ces centres serait au début insuffisante pour maintenir les éléments légers tels que l'hydrogène : en effet, dans la théorie cinétique, les molécules gazeuses ont des vitesses moyennes d'autant plus grandes que le gaz est plus léger; les molécules d'hydrogène et d'hélium s'échappent donc, ou plutôt ne sont pas retenues par les centres d'attraction, tandis que les molécules de vapeurs métalliques, plus lourdes, sont captées : nous avons là l'étoile métallique de la branche ascendante des températures. Le centre d'attraction augmente peu à peu, et l'étoile se nourrit par bombardement ; sa masse devient bientôt assez considérable pour retenir d'abord l'hélium puis l'hydrogène : nous sommes au sommet de la courbe. La condensation augmentant encore, les gaz légers finissent par être *absorbés* par la masse centrale (comme l'hydrogène est absorbé par une masse de palladium) : nous arrivons à l'étoile métallique de la branche descendante.

Les spectres d'Arcturus et du Soleil (que Sir N. LOCKYER plaçait dans le même groupe) diffèrent en ce qu'Arcturus ne présente pas les raies de l'hydrogène. M. SCHUSTER suppose que cette étoile ayant une masse plus considérable que le Soleil, son noyau central aura plus vite absorbé l'hydrogène, qui aura ainsi abandonné son atmosphère.

Dans les étoiles doubles, la composante la plus brillante (qui est sans doute aussi la plus grosse) est souvent du type Soleil, alors que la plus faible est blanche et du type gazeux. La différence d'éclat pourrait, d'après M. Schuster, provenir de ce que la grande composante a absorbé l'hydrogène plus vite que l'autre.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE M. ARRHENIUS [1].

178. Dans la théorie de M. Arrhenius, la pression de radiation jouant un rôle très important, il est nécessaire de commencer par définir cette pression.

Dans une de ses théories de l'électricité, Maxwell [2], pour expliquer les attractions électrostatiques, fait intervenir l'élasticité du milieu fluide répandu entre les conducteurs. Il admet que, dans un champ électrique, il existe des pressions et des tensions : en chaque point du milieu, un élément plan normal à la ligne de force subit une tension, un élément plan contenant la ligne de force subit une compression ; ces tensions et ces pressions sont, d'après Maxwell, proportionnelles au *carré* de la force électrostatique.

De même, pour expliquer les actions magnétostatiques, Maxwell admet qu'un champ magnétique donne lieu à des pressions et des tensions du milieu, en tout comparables à celles qui sont produites par un champ électrique.

Si le milieu est à la fois le siège d'un champ électrique et d'un champ magnétique, les deux sortes de pressions et de tensions existent simultanément et se superposent.

La lumière, d'après Maxwell, est un phénomène électromagnétique périodique. Considérons de la lumière rectilignement polarisée se propageant par ondes planes : dans le plan d'une onde, nous aurons une force électrique alternative parallèle à la « direction de Fresnel » [3] et une force magnétique alternative perpendiculaire à cette

---

[1] Svante Arrhenius : *L'Évolution des Mondes*, traduction française par T. Seyrig (Paris, Béranger, 1910).

[2] Voir H. Poincaré : *Électricité et Optique*, 2e édit. (Paris, Gauthier-Villars, 1901) 1re partie, Ch. IV et Ch. XI.

[3] La direction de Fresnel est perpendiculaire au plan de polarisation de la lumière : c'est parallèlement à cette direction que s'effectuent les vibrations dans la théorie de l'éther lumineux élastique de Fresnel.

direction. Considérons alors un élément plan parallèle à l'onde : cet élément est à la fois parallèle à la force magnétique et à la force électrique, il subit donc une pression provenant de chacun de ces deux champs ; ces deux pressions s'ajoutent. Considérons, au contraire, un élément plan normal à l'onde et contenant par exemple la direction de Fresnel : cet élément, étant parallèle à la force électrique, subit une pression, mais, étant perpendiculaire à la force magnétique, il subit une tension. Or, il se trouve que cette tension d'origine magnétique, détruit exactement la pression d'origine électrique ; donc cet élément ne subit aucun effort. On reconnait qu'il en est de même de tout élément plan normal à l'onde. Mais pour tout élément plan non normal à l'onde, il n'y a pas compensation : chaque élément plan non normal à l'onde subit une pression dite *pression de radiation* (1).

179. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction nous apprend que le centre de gravité d'un système de corps soustrait à toute action extérieure décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme. A cause de la pression de radiation, ce principe n'est plus vrai lorsque les corps envisagés reçoivent ou émettent de la lumière. Il faut alors, pour obtenir la quantité totale de mouvement, celle qui demeure constante, ajouter, à la quantité de mouvement réelle des corps matériels, la quantité de mouvement d'un fluide fictif, la lumière.

Considérons un train d'ondes planes TT′ qui se propagent (*fig.* 39) : dans l'espace occupé à chaque instant par ce train d'ondes, est localisée une certaine énergie par unité de volume. Assimilons le train d'ondes à un fluide fictif se déplaçant avec la vitesse de la lumière, et ayant une densité proportionnelle à l'énergie par unité de volume.

Supposons que notre train d'ondes vienne frapper normalement une plaque plane P qui lui est parallèle. Admettons d'abord que cette plaque P soit parfaitement absorbante. Avant le choc, le fluide fictif auquel nous assimilons le train d'ondes TT′ possède une certaine quantité de mouvement M. Après le choc tout se passe comme si le fluide fictif avait disparu : la plaque P aura acquis une quantité de mouvement égale à M. En un mot, au point de vue des quantités de

(1) Au point de vue de l'ordre de grandeur de cette pression, disons que, pour un mètre carré exposé normalement à la lumière solaire, elle est d'environ $0^{mg},6$ si la surface est absorbante et de $1^{mg},2$ si elle est parfaitement réfléchissante.

mouvement, tout se passe comme si la théorie de l'*émission* de la lumière était vraie.

Si la plaque P avait été supposée parfaitement réfléchissante, le train d'ondes TT′ (ou plutôt son fluide fictif représentatif) aurait eu,

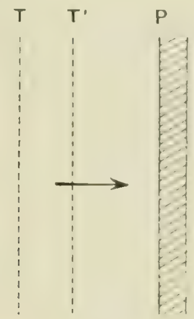


fig. 39.

après le choc, la quantité de mouvement — M : conséquemment, la plaque P aurait pris une quantité de mouvement 2M.

Les corps qui reçoivent de la lumière sont donc comme *poussés* par elle. Pareillement, les corps qui émettent de la lumière *reculent* comme un canon.

180. L'existence de la pression de radiation a été rattachée par Bartoli à la loi de Stefan, au moyen de considérations thermodynamiques et indépendamment de toute hypothèse sur la nature électromagnétique de la lumière.

Considérons un corps de pompe fermé par un piston mobile sans frottement. L'appareil est vide et maintenu à une température T par une source extérieure. L'appareil étant entièrement clos, le rayonnement en équilibre à son intérieur est, comme on sait, celui du corps noir idéal (d'ailleurs, rien n'empêcherait de supposer que toutes les parois sont parfaitement noires). Nous allons prouver qu'il ne peut y avoir équilibre que si le piston supporte une certaine pression p.

D'après la loi de Stefan, l'énergie rayonnée dans tous les sens par les parois du corps de pompe et du piston est proportionnelle à T^4 ; l'énergie absorbée par les parois, égale à l'énergie émise, est aussi proportionnelle à T^4. Il en résulte que l'énergie interne totale U à l'intérieur est aussi proportionnelle à T^4 ; elle est, d'ailleurs, proportionnelle au

volume v du corps de pompe ; on a donc

$$U = AT^4 v,$$

A étant un coefficient constant.

Supposons que le piston se soulève, accroissant ainsi le volume de dv : en même temps, la source extérieure cède au système une quantité de chaleur dQ, et l'équation fondamentale de la Thermodynamique (principe d'équivalence) donne

$$\begin{aligned} dQ &= dU + pdv \\ &= 4\,AT^3\,vdT + AT^4\,dv + pdv. \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, le système était primitivement en équilibre, *la modification peut être supposée réversible*, et par suite

$$\frac{dQ}{T}$$

est une différentielle exacte (principe de Carnot) : ce que nous écrivons

$$4\,AT^2 vdT + \left(AT^3 + \frac{p}{T}\right) dv = dS.$$

La condition d'intégrabilité du premier membre donne

$$\frac{d}{dT}\left(AT^3 + \frac{p}{T}\right) = \frac{d}{dv}\,(4\,AT^2 v),$$

d'où

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{p}{T}\right) = AT^2,$$

équation qui prouve déjà que p ne peut pas être nul.

Intégrant, il vient

$$\frac{p}{T} = A\,\frac{T^3}{3} + \varphi\,(v).$$

Il est presque évident que p ne dépend pas de v ; nous poserons donc

$$\varphi(v) = 0.$$

Par suite

$$p = \frac{AT^4}{3},$$

d'où

$$3pv = AT^4 v = U,$$

$$p = \frac{U}{3v}.$$

La pression de radiation à l'intérieur du cylindre est proportionnelle à $\frac{U}{v}$, c'est-à-dire à l'énergie par unité de volume, qu'on peut appeler densité de l'énergie de radiation.

Le cas que nous venons de traiter n'est pas absolument comparable à celui que nous étudiions au numéro précédent, où nous considérions un train d'ondes planes se propageant dans une direction fixe et venant choquer normalement un mur ; ici, à l'intérieur de notre corps de pompe, nous avons des ondes de toutes directions. Or, la pression de radiation est assimilable au choc produit par un fluide fictif, et tout se passe, avons-nous dit, comme si la théorie de l'émission était vraie. Alors dans le corps de pompe les projectiles lumineux (ou calorifiques) se croisent dans toutes les directions, ils sont comparables aux molécules gazeuses dans le théorie cinétique des gaz, et on peut leur appliquer le théorème du *viriel* qui conduit à l'équation (n° **75**)

$$(1) \qquad 3pv = 2\bar{T}.$$

Dans le cas d'un train d'ondes planes, au contraire, tous les projectiles fictifs ont la même direction : s'ils viennent choquer normalement un mur plan parfaitement réfléchissant, le même calcul qui nous avait fourni l'équation (1) nous donnerait maintenant

$$pv = 2\,T.$$

On peut donc dire que la pression de radiation (à énergie égale) est trois fois plus forte dans le cas du train d'ondes planes que dans le cas du corps de pompe. Elle a donc pour valeur

$$p = \frac{U}{v},$$

où $\frac{U}{v}$ représente l'énergie par unité de volume due à l'ensemble de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

Si le mur plan, au lieu d'être réfléchissant, avait été supposé absorbant, la pression eût été moitié moindre ; la densité de l'énergie eût

été réduite de moitié aussi, puisqu'alors il n'y aurait pas d'onde réfléchie.

181. Revenons à l'exposé de la théorie de M. Arrhenius. Considérons une particule matérielle au voisinage du Soleil. Elle subira à la fois une attraction due à la gravitation et une répulsion due à la pression de radiation provenant de la lumière du Soleil ; l'attraction est proportionnelle à la *masse* de la particule, la répulsion proportionnelle à sa *surface*. Par conséquent, plus la densité sera faible et plus les dimensions de la particule seront petites, plus la pression de radiation prendra d'importance relativement à la gravité. Elle pourra même arriver à l'emporter.

Une gouttelette sphérique de même densité que l'eau, parfaitement réfléchissante et de diamètre $0^{mm},0015$, se trouverait en équilibre au voisinage du Soleil sous l'action de la gravité et de la pression de radiation. Si le diamètre de la gouttelette diminuait, la force répulsive deviendrait prépondérante, et la gouttelette serait chassée loin du Soleil. Toutefois, il ne faut pas que le diamètre de la gouttelette devienne par trop petit : s'il devenait de beaucoup inférieur à une longueur d'onde de la radiation incidente, les phénomènes de diffraction changeraient complètement les choses, et, au-dessous d'un certain diamètre, la pesanteur reprendrait son influence prépondérante. Mais, entre ces deux limites, il y a répulsion effective : pour des gouttelettes de $0^{mm},00016$ de diamètre, par exemple, la répulsion due à la lumière solaire serait environ dix fois plus grande que la pesanteur [1]. La proportion pourrait être encore plus forte pour des liquides plus légers que l'eau, comme le pétrole.

182. Ainsi, lorsque de telles particules arrivent au voisinage du Soleil, elles en sont comme chassées. On peut expliquer de cette manière les aspects que présentent les queues des comètes, toujours dirigées à l'opposé du Soleil, et qu'on considérait depuis longtemps comme étant dues à une force répulsive émanée de cette astre. On admet actuellement que cette force répulsive n'est autre que la pression de radiation qui s'exerce sur les particules les plus fines de la matière cométaire.

---

(1) Pour qu'il y ait pression de radiation, il faut que le corps sur lequel tombe la lumière ne soit pas transparent ; s'il laisse passer la lumière, celle-ci ne produit pas de pression.

183. M. Arrhenius pense que la couronne solaire est due à des phénomènes du même genre. La matière coronale serait constituée par de fines particules que la pression de radiation repousserait loin du Soleil. La couronne serait donc parfaitement comparable aux queues des comètes.

Quelle que soit l'extrême ténuité de la matière coronale, ce processus représente néanmoins pour le Soleil une perte constante de substance. Ne pourrait on pas alors revenir à la théorie météoritique primitive de Lord Kelvin (n^{os} **141** à **144**), qui supposait la chaleur solaire entretenue par une pluie de météores tombant sur le Soleil. On se rappelle que Lord Kelvin avait abandonné cette hypothèse, parce qu'il en serait résulté pour le Soleil un accroissement de masse, ayant pour conséquence une variation inadmissible de la durée de l'année. Mais ne pourrait-on pas penser que cet accroissement de masse est compensé par la déperdition constante de la matière coronale ? Dans cette hypothèse, la matière décrirait une sorte de *cycle* : les météores tombant sur le Soleil s'y trouveraient désagrégés, réduits en fines poussières, et celles-ci seraient à leur tour chassées par la pression de radiation ; elles se rassembleraient au loin pour former de nouveaux météores qui retomberaient sur le Soleil, entretenant ainsi sa chaleur. Cette manière de voir est insoutenable. En effet, dans ce cycle, les forces effectuent constamment un travail *positif* : quand le météore tombe, l'attraction l'emporte et c'est la gravité qui travaille ; quand les poussières coronales sont chassées, la répulsion l'emporte et le travail est effectué par la pression de radiation. Aux dépens de quelle énergie ce travail constant est-il produit ? C'est évidemment aux dépens de l'énergie solaire. Il est donc impossible de voir dans ce mécanisme un entretien possible de cette énergie.

M. Arrhenius a d'ailleurs essayé de se faire une idée de la quantité de matière météorique qui tombe réellement sur le Soleil : la quantité de matière tombant annuellement sur la Terre est d'environ 20 000 tonnes. En partant de cette base, M. Arrhenius évalue à 300.10^9 tonnes la pluie météorique qui se précipite annuellement à la surface du Soleil. La masse totale du Soleil étant de 2.10^{27} tonnes environ, le bombardement météorique accroît donc annuellement cette masse de

$$\frac{300.10^9}{2.10^{27}} = \frac{1,5}{10^{16}}$$

de sa valeur. Or nous avons vu que, pour compenser la perte de chaleur du Soleil, Lord Kelvin avait besoin d'admettre que la masse de cet astre s'accrût par an de

$$\frac{1}{32\,000\,000} = \frac{1}{32.10^6}$$

de sa valeur, chiffre incomparablement plus fort que le précédent. La chute effective des météores sur le Soleil est donc beaucoup trop faible pour être capable d'entretenir sa radiation : l'hypothèse météorique est à rejeter.

184. On sait que les rayons ultraviolets ont la propriété d'ioniser les gaz. Comme la lumière solaire est riche en rayons ultraviolets, on peut penser que l'atmosphère du Soleil contient des gaz ionisés. Les ions ont la propriété de condenser les vapeurs, et cette propriété appartient en général à un bien plus haut degré aux ions négatifs qu'aux ions positifs (expérience de M. Wilson sur la condensation de la vapeur d'eau). Les ions négatifs de l'atmosphère solaire doivent donc condenser la matière autour d'eux et former de fines particules qui seront repoussées par la pression de radiation. Les particules de matière coronale sont donc chargées négativement, et il doit rester à la surface du Soleil une charge d'électricité positive. Toutefois, cette charge positive du Soleil ne peut pas dépasser une certaine limite, au delà de laquelle elle deviendrait assez puissante pour retenir les particules chargées négativement, malgré la répulsion que leur fait subir la pression de radiation. Tous les phénomènes électriques résultant de la pression de radiation cesseraient du coup. M. Arrhenius estime que cette charge limite du Soleil est de 250 milliards de coulombs.

Le Soleil, étant donc chargé positivement, attire à lui tous les électrons négatifs libres qui parcourent l'espace. Ces électrons, une fois captés, condenseront autour d'eux la matière de l'atmosphère solaire et reformeront des particules qui seront de nouveau chassées par la pression de radiation : ces particules s'agglomèreront au loin en météorites qui, sous l'influence de la lumière ultraviolette, perdront leur charge négative sous forme d'électrons libres ; ceux-ci seront de nouveau captés par le Soleil et le même cycle recommencera. Bien entendu, il ne faut pas voir dans ce cycle l'origine de l'entretien de la chaleur solaire, puisque dans ce cycle il y a constam-

ment un travail positif, produit aux dépens de l'énergie solaire, comme nous l'expliquions au numéro précédent pour réfuter une hypothèse analogue ; toutefois le travail de l'attraction électrostatique vient s'ajouter à celui de la gravité ; et un même accroissement de la masse solaire correspond à un apport d'énergie mille fois plus considérable.

185. Les particules chargées négativement que chasse la lumière du Soleil pourront atteindre notre atmosphère, où elles se manifesteront par les aurores boréales. Elles se déchargeront en arrivant dans les hautes régions de l'atmosphère en émettant des rayons cathodiques, origine de l'aurore. Les maxima et les minima périodiques des aurores polaires et ceux des perturbations magnétiques concordent d'une façon très marquée avec ceux de l'activité éruptive du Soleil. C'est ainsi que très souvent le passage d'une tache solaire au méridien dont le plan contient la Terre est suivi par une tempête magnétique et par une aurore. Une gouttelette de $0^{mm},00016$ de diamètre, ayant la densité de l'eau, mettrait 56 heures pour venir du Soleil à la Terre. Or, plusieurs observateurs ont constaté, paraît-il, un retard du même ordre entre le passage d'une tache solaire au méridien et le maximum de la perturbation magnétique ou de l'aurore polaire correspondante.

186. Mais les particules chargées qui sont chassées par le Soleil, et aussi celles que chassent les diverses étoiles, peuvent, selon M. Arrhenius, faire des trajets beaucoup plus longs à travers les espaces célestes : elles peuvent atteindre les nébuleuses. M. Arrhenius pense que les nébuleuses sont à des températures excessivement froides (50° absolus environ). Malgré cela leurs parties périphériques arrivent à devenir lumineuses, par suite du bombardement que leur font subir les particules chargées qui sillonnent l'espace de toutes parts : l'origine de cette luminescence des parties superficielles de la nébuleuse serait donc comparable à celle des aurores polaires de notre atmosphère. Comme la majeure partie des particules de poussière est arrêtée avant d'avoir pénétré un peu profondément à l'intérieur de la nébuleuse, c'est la périphérie seule qui est lumineuse. Quant à ce qui se trouve dans les parties profondes, nous l'ignorons absolument.

Le spectre des nébuleuses présente en général les raies de l'hydrogène, de l'hélium, et d'un autre élément, le « nébulium » dont la

lumière n'a été observée nulle part ailleurs. L'hélium et l'hydrogène (et sans doute aussi le nébulium) étant des gaz très peu condensables, sont susceptibles d'exister *à l'état gazeux* aux très basses températures que M. Arrhenius attribue aux nébuleuses : à ces températures tous les autres éléments sont liquéfiés ou solidifiés ; par suite, les parties profondes de la nébuleuse peuvent contenir ces éléments condensés ; mais les parties extérieures ne doivent contenir que les éléments gazeux, c'est-à-dire l'hydrogène et l'hélium (et le nébulium). La périphérie de la nébuleuse étant seule lumineuse, d'après M. Arrhenius, il n'est pas étonnant que le spectre de la nébuleuse ne présente que les raies de ces derniers éléments.

187. Revenons au Soleil et suivons son évolution. Le Soleil perd constamment de la chaleur ; mais il contient à son intérieur des matières radioactives ou des combinaisons endothermiques ; tout se passe donc comme s'il avait une chaleur spécifique énorme, et il possède un provision de calorique extrêmement considérable qui lui permet de continuer sa radiation pendant très longtemps — des billions d'années, dit M. Arrhenius (il entend par là 10^{12}). — Mais quelle que soit la lenteur extrême du refroidissement, il arrivera un moment où la température de la surface du Soleil sera assez abaissée pour que celle-ci commence à s'encroûter. La croûte mince périphérique ainsi formée protégera l'intérieur du Soleil resté fluide contre le refroidissement qui deviendra de plus en plus lent, de même que la croûte terrestre garantit les parties profondes de la Terre ([1]).

Le Soleil ressemblera alors à une bombe remplie d'explosifs : sa surface sera très froide, mais ses parties centrales auront conservé une température presque aussi élevée que celle qu'elles ont aujourd'hui, et il s'y trouvera encore les mêmes combinaisons endothermiques que maintenant.

Que deux pareilles bombes viennent à se rencontrer, leur choc produira une chaleur et une lumière énormes : c'est l'origine d'une étoile nouvelle.

Quelle est la probabilité pour qu'une étoile déterminée en rencontre une autre ? Étant données les distances qui séparent en moyenne les

---

([1]) On sait que Lord Kelvin pense, contrairement à cette opinion, que la Terre est entièrement solidifiée : si en effet son intérieur était fluide, le phénomène de la précession des équinoxes serait très différent de celui que nous observons.

étoiles et les dimensions de celles-ci, il y a des chances pour qu'un choc se produise au bout d'un temps de l'ordre de 10^{17} années. Mais supposons que, dans l'espace, il existe non seulement les étoiles brillantes que nous voyons, mais aussi un très grand nombre d'étoiles obscures : les chocs deviendront beaucoup plus fréquents. Si l'on veut expliquer par de telles rencontres le nombre relativement grand d'étoiles nouvelles que nous observons (soit à peu près une par an), on est amené à supposer qu'il y a environ 10 000 fois plus d'étoiles obscures que d'étoiles brillantes ; supposition assez peu vraisemblable, car si, dans un cube ayant pour arête la distance du Soleil à α du Centaure, il existait 10 000 étoiles de masse comparable à celle du Soleil, elles produiraient sur les mouvements des planètes des pertubations qui ne passeraient sans doute pas inaperçues.

Quoi qu'il en soit, supposons que deux soleils éteints encroûtés se heurtent : il se produit une *Nova*. Le choc en général ne sera pas central et il en résultera un mouvement de rotation rapide de l'étoile nouvelle. La collision aura fait jaillir des deux corps deux puissants jets de matière (*fig.* 40) formant comme de formidables éruptions des maté-

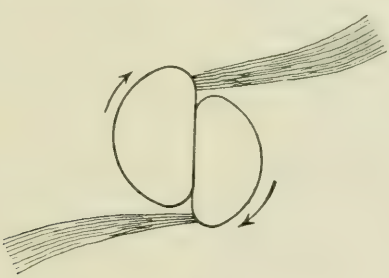


fig. 40.

riaux explosifs provenant des régions centrales. Ces deux jets, grâce à la rotation générale de l'ensemble, présenteront l'aspect d'un tourniquet. Et comme l'expansion des gaz projetés produit leur rapide refroidissement, les jets latéraux seront relativement froids, alors que le centre sera très chaud. La lumière blanche du corps central sera plus ou moins absorbée par la couche gazeuse des deux jets spiraloïdes, suivant la position de ceux-ci par rapport à l'observateur. La rotation produira donc une alternance d'absorption et de non-absorption, c'est-à-dire une variation périodique du spectre de l'étoile nouvelle, ainsi

qu'on l'a observé pour la *Nova Persei* qui est apparue en février 1901 dans la constellation de Persée.

La rotation extrêmement violente de la masse centrale des deux étoiles fusionnées produit une force centrifuge considérable qui transformera cette masse tournante en une sorte de disque aplati, présentant des formes spiraloïdes : ce serait l'origine des nébuleuses spirales (1).

La nébuleuse ainsi formée recevra le bombardement des corpuscules qui sillonnent l'espace : chacunes de ces particules deviendra un centre d'attraction qui se nourrira aux dépens des gaz de la nébuleuse : ainsi se formeraient les météorites à l'intérieur de la nébuleuse.

Mais les nébuleuses peuvent faire des captures bien plus importantes : elles peuvent capter de petits soleils. Un petit soleil arrivant dans la nébuleuse attire à lui les météorites déjà formées et accroît ainsi sa masse. C'est de cette façon que les nébuleuses se transforment en amas d'étoiles. Les diverses étoiles d'un même amas seraient donc originellement étrangères l'une à l'autre : elles auraient seulement été retenues par la même nébuleuse qui les aurait arrêtées, de même qu'une toile d'araignée arrête les mouches qui essaient de la traverser. La Voie lactée elle-même pourraient avoir cette origine. Ses soleils auraient été captés par une nébuleuse gazeuse provenant d'une énorme *Nova*, et leur ensemble reproduirait la forme spirale de cette nébuleuse gazeuse, aujourd'hui disparue.

Chaque soleil de l'amas suivra ensuite l'évolution habituelle des étoiles : d'étoile gazeuse il deviendra étoile protométallique, puis métallique, puis étoile à spectre de bandes, sa température allant constamment en diminuant. Nous arrivons ainsi au soleil refroidi, encroûté.

M. Arrhenius admet donc que, de tout temps, le Monde a suivi cette évolution alternante, les nébuleuses étant engendrées par les soleils, les soleils étant à leur tour formés dans les nébuleuses. Le cycle de cette évolution est le suivant : étoile nouvelle, nébuleuse spirale, amas

(1) Les nébuleuses spirales présentent en général plutôt un spectre continu qu'un spectre de gaz C'est pourquoi beaucoup d'astronomes les considèrent comme des voies lactées extrêmement lointaines que leur grand éloignement a seul empêché jusqu'ici de résoudre en étoiles. Ce n'est pas l'opinion de M. Arrhenius qui pense que, dans les nébuleuses spirales, les couches extérieures qui masquent le corps central sont extrêmement raréfiées et ne parviennent pas à cacher le spectre des poussières incandescentes des couches profondes.

d'étoiles, soleil chaud, soleil refroidi, soleil éteint. Le choc de deux soleils éteints donne de nouveau une *Nova*.

188. M. Arrhenius pense que le Monde est infini. S'il n'en était pas ainsi, dit-il, les poussières seraient chassées indéfiniment par la pression de radiation, elles ne seraient pas captées en chemin, et le monde finirait par s'évanouir. Cette raison n'est pas convaincante, car on peut penser qu'une fois arrivées à de très grandes distances, les poussières ne subissent plus la pression de radiation, la lumière étant toujours plus ou moins absorbée dans son parcours.

Si l'Univers est infini, une droite de direction quelconque, issue de notre œil, doit finir par rencontrer une étoile : il semble en résulter que le Ciel tout entier devrait avoir l'éclat du Soleil. Mais cette conclusion n'est pas légitime, parce que, comme nous venons de le dire, la lumière subit toujours une absorption plus ou moins forte dans les espaces interstellaires. Dans l'ordre d'idées de M. Arrhenius, cette absorption serait due aux soleils éteints, et surtout aux matières cosmiques nébuleuses obscures beaucoup plus grandes, qu'il suppose abondamment répandues dans l'espace. Ce dernier point de vue semble trouver sa confirmation dans un phénomène qu'a présenté la *Nova Persei* : on a observé autour de cette étoile nouvelle plusieurs nébulosités sphériques s'éloignant du centre, comme des ondes, avec des vitesses comparables à celle de la lumière ; il semble qu'on puisse supposer que la lumière de l'explosion est venue successivement rendre visible les diverses couches d'une immense nébuleuse, ou bien encore que c'étaient là des vitesses de propagation d'une luminescence due par exemple à un bombardement cathodique à travers une nébulosité obscure par elle-même, plutôt que des vitesses réelles de corps matériels.

189. Abordons maintenant un point très délicat de cette théorie. M. Arrhenius, supposant que l'Univers, dans son évolution des nébuleuses aux soleils et des soleils aux nébuleuses, décrit une sorte de cycle fermé, est amené à penser que l'Univers ne doit pas « vieillir ». Il cherche donc à échapper à la « mort calorifique » (*Wärmetod*) que Clausius avait cru pouvoir assigner à l'Univers, d'après le second principe de la Thermodynamique (Principe de Carnot-Clausius).

Ce second principe, on l'énonce parfois d'une façon peu correcte en disant qu' « un système matériel tend vers l'homogénéité tant au

point de vue de la distribution de la matière qu'au point de vue de la distribution des températures ». D'après cet énoncé (et en admettant que le principe puisse s'appliquer à un système *infini* comme l'Univers), la matière, dans son état final, serait également répandue partout d'une façon uniforme sans aucune différentiation locale quelconque : ce serait la mort du système. Or, M. Arrhenius ne veut pas voir mourir l'Univers, et c'est pour cela qu'il s'efforce de mettre en échec le principe de Carnot, en tant qu'il s'agit de l'Univers. Selon lui, « l'entropie augmente dans les soleils, mais diminue dans les nébuleuses » ; autrement dit, « l'énergie est dissipée ou « détériorée » dans les corps qui se trouvent à l'état de soleils et au contraire « améliorée » dans ceux qui sont à l'état de nébuleuses » (*L'Evolution des Mondes*, Préface, p. IV).

Les nébuleuses reçoivent de la chaleur par le rayonnement des étoiles : il semble donc qu'elles ne vont pas rester froides, mais tendre à se mettre finalement en équilibre de température avec les étoiles, d'après le principe de Carnot qui paraît exiger la tendance au *nivellement* des températures (de même qu'il semble exiger la tendance à la diffusion homogène de la matière). Nous allons voir les raisons que donne M. Arrhenius pour être d'un avis contraire.

190. Dans la théorie cinétique des gaz, la tendance à l'homogène s'explique d'une façon très simple : si nous avons un récipient plein de gaz et si le gaz qui remplit une moitié du récipient (par exemple la moitié de droite) est plus chaud que celui qui remplit l'autre moitié (la moitié de gauche), la vitesse moyenne des molécules est plus grande à droite qu'à gauche. Mais, par suite du brassage produit par les mouvements des molécules, les molécules de droite passent à gauche et inversement, et il finit bientôt par s'établir un équilibre de température dans lequel la vitesse moyenne des molécules est la même partout.

De même, si la moitié de droite du récipient avait été occupée initialement par de l'azote, et la moitié de gauche par de l'hydrogène, l'état final eût été le mélange complet, par suite du mouvement des molécules gazeuses.

Nous n'avons aucun moyen d'effectuer inversement (sans travail extérieur) le triage entre les molécules d'azote et celles d'hydrogène, ou bien entre les molécules à très grandes vitesses et celles à petites vitesses, de façon à ramener les unes à droite du récipient, les autres

à gauche. Mais si nous ne savons pas faire cette opération, elle serait résolue sans peine par les « démons » qu'a imaginés MAXWELL. Séparons en deux notre récipient par une cloison percée de tout petits trous, pouvant ne laisser passer qu'une seule molécule à la fois. Chaque petit trou est muni d'une soupape qu'on peut à volonté ouvrir ou fermer *sans travail*. Derrière chacune de ces soupapes, plaçons un observateur infiniment petit (démon de MAXWELL), servant en quelque sorte de douanier. Chaque fois qu'un démon verra une molécule à grande vitesse se diriger de gauche à droite, il ouvrira sa soupape pour la laisser passer ; mais il la fermera à toute molécule à petite vitesse allant dans la même direction ; de même il ouvrira la porte aux molécules à petite vitesse allant de droite à gauche, mais il la fermera aux molécules à grande vitesse allant dans la même direction. Nos petits démons, *sans produire aucun travail par eux-mêmes*, arriveront ainsi à accumuler à droite toutes les molécules à grandes vitesses, à gauche toutes celles à petites vitesses : ils auront séparé la masse gazeuse primitivement isotherme en deux parties à températures différentes. Ils auront *tourné* le principe de CARNOT.

191. Pour éviter la mort calorifique de l'Univers, M. ARRHENIUS pense avoir trouvé un mécanisme analogue se produisant naturellement. Considérons une planète, la Terre par exemple, possédant une atmosphère limitée en équilibre convectif (ou adiabatique). Une molécule de la région externe de cette atmosphère, si elle possède une vitesse suffisante (cette vitesse serait de 11 kilomètres par seconde pour la Terre), s'échappe pour toujours de la sphère d'attraction de la planète et continue son chemin vers l'infini. L'atmosphère de la planète perd donc sans cesse les molécules gazeuses qui sont animées d'une vitesse suffisante. Or la distribution des vitesses obéissant dans toute région à la loi de MAXWELL (n° **80**, p. 107), il y a toujours des molécules qui ont de grandes vitesses ; par suite l'atmosphère de la planète s'appauvrit sans cesse. Les vitesses des molécules gazeuses sont d'autant plus grandes que le gaz atmosphérique est plus chaud et plus léger. L'appauvrissement sera aussi plus fort pour une petite planète que pour une grosse, car, par la gravitation, une grosse planète retiendra plus qu'une petite ses molécules atmosphériques. C'est ainsi que la Lune, dont la masse est faible, a perdu toute son atmosphère. La Terre a perdu l'hydrogène qui est très léger, elle a conservé l'oxygène et l'azote plus lourds.

Cette perte des molécules atmosphériques joue, d'après M. ARRHENIUS, un rôle extrêmement important dans l'économie des nébuleuses, où la gravité est très faible, ainsi que la densité des gaz constituants. Les parties périphériques perdront donc très facilement leurs molécules à grandes vitesses, refroidissant ainsi les couches les plus éloignées du centre. Il en résulte que la chaleur envoyée par les soleils aux nébuleuses *n'élève pas la température de celles-ci* : en effet, cette énergie communique de la vitesse à certaines molécules, mais ces molécules s'éloignent de la nébuleuse pour toujours. Ces molécules chaudes finiront par être absorbées par des soleils, contribuant ainsi à entretenir leur rayonnement.

192. Ce mécanisme nous met-il pour toujours à l'abri de la loi de dégradation qu'implique le principe de CARNOT ?

Observons que le raisonnement s'appliquerait à un univers *fini* : si, par exemple, notre Monde n'était pas *euclidien* mais *riemannien*, il serait fini quoiqu'illimité : nous aurions donc un système fini ne se dégradant pas : c'est la négation absolue du principe de CARNOT, tel qu'on l'envisage habituellement. Que vont devenir ces particules échappées des nébuleuses ? on peut supposer qu'après avoir erré dans l'Espace, elles finissent par être absorbées par les soleils en formation en leur fournissant à la fois de la matière et de l'énergie ; nous avons vu qu'elles ne sauraient suffire pour entretenir l'énergie des Soleils *formés*, dont la masse ne s'accroît plus.

Mais ce processus pourra-t-il se poursuivre indéfiniment ? ou bien ne viendra-t-il pas un moment où ces particules errantes rempliront les vides interstellaires, où il n'y aura plus de vide et où, par conséquent, les molécules n'auront plus de raison de quitter les nébuleuses.

Une comparaison fera mieux comprendre notre pensée. Reprenons le cas d'une planète munie d'une atmosphère limitée en équilibre convectif : cet équilibre convectif suppose implicitement des mouvements internes et par suite des frottements : un tel équilibre ne subsistera donc pas indéfiniment, il tendra à se transformer en équilibre isothermique. Dans le cas de l'équilibre isothermique, l'atmosphère n'a plus de limite supérieure, elle s'étend indéfiniment. Comment cet équilibre isothermique s'établira-t-il ? Ce sera par l'échange des molécules entre les parties hautes et les parties basses de l'atmosphère : or, une molécule à grande vitesse partant des régions basses arrivera dans les régions hautes avec une vitesse très diminuée (à

cause de la pesanteur ; de même, une molécule se dirigeant des régions hautes vers le bas arrivera avec une vitesse très augmentée. Il ne semble donc pas à première vue que la haute atmosphère va s'échauffer et la basse atmosphère se refroidir. Il semble donc qu'ici encore nous n'aurons pas tendance au nivellement des températures, et que ce mécanisme, comparable à celui de M. Arrhenius, mettra en échec le principe de Carnot. Mais observons que les seules molécules qui pourront passer des régions basses vers les régions hautes sont celles qui sont animées d'une très grande vitesse ; et, bien que perdant en route une partie de cette vitesse, elles posséderont encore assez de vitesse pour échauffer les régions hautes. L'équilibre final sera donc isotherme, conformément au principe de Carnot.

Or, dans le mécanisme de M. Arrhenius, il se passe quelque chose de tout pareil : les molécules parties des couches internes de la nébuleuse vont aller dans les régions supérieures, c'est-à-dire dans le vide où règne le zéro absolu : la densité et la température de ces régions supérieures, primitivement nulles, vont donc s'accroître peu à peu, c'est-à-dire que nous tendons vers l'uniformité des températures et des densités, ce qui est encore en parfait accord avec le principe de Carnot ; les nébuleuses ne s'échauffent pas quand les soleils leur envoient de la chaleur, mais c'est parce qu'elles cèdent à leur tour de la chaleur à une source encore plus froide, le vide dont la température absolue est nulle.

Cependant il n'est pas tout à fait légitime de comparer les gaz des nébuleuses, et surtout les molécules égarées dans un vide presque absolu, à une atmosphère gazeuse ordinaire. En effet, dans les gaz *extrêmement raréfiés*, la vitesse des molécules n'est plus de la *chaleur*, c'est de la véritable *force vive*, c'est-à-dire de l'énergie *non dégradée*. Si, par exemple, il n'y a qu'une seule molécule par centimètre cube, on n'a pas, dans chaque petite région élémentaire, un mélange confus de projectiles avec vitesses dirigées dans tous les sens (comme il arrive pour un gaz à la pression ordinaire, où ce mouvement parfaitement désordonné constitue la chaleur), mais on a, au contraire, une vitesse unique dirigée dans un sens bien déterminé. Pour agir individuellement sur chaque molécule, nous n'avons plus besoin de recourir aux démons de Maxwell ; nos instruments ordinaires pourraient suffire. Il n'y a donc peut-être pas lieu, pour les nébuleuses, de parler de dégradation de l'énergie, toute énergie y étant purement méca-

nique; et par suite le principe de Carnot, sans être en défaut, ne trouverait pas son application.

193. M. Arrhenius indique une seconde cause qui fait que les nébuleuses, en recevant de la chaleur des soleils, voient leur température, non pas augmenter, mais au contraire diminuer. Il assimile les nébuleuses à des masses gazeuses en équilibre adiabatique, comme celles que nous avons étudiées au Chapitre VIII (Section **III**), d'après M. Homer Lane. Une telle masse gazeuse a une chaleur spécifique *négative* ; par suite, un gain de chaleur la refroidit.

Bien entendu il ne peut pas être question, cette fois, de voir dans ce processus un échec au principe de Carnot : c'est, au contraire, en pleine conformité avec ce principe que s'accomplit le phénomène. Considérons, par exemple deux masses, de gaz parfait, toutes deux en équilibre convectif, mais inégalement chaudes [1] : la plus chaude rayonnera vers la plus froide ; cette dernière, recevant de la chaleur, se refroidira encore, tandis que la première, perdant de la chaleur, s'échauffera. Les températures des deux corps, loin de se niveler, s'écarteront au contraire de plus en plus l'une de l'autre. Le principe de Carnot est-il violé? Au contraire, il est pleinement satisfait, puisque *la chaleur a passé du corps chaud sur le corps froid.* C'est le phénomène inverse, le nivellement des températures, qui l'aurait violé, s'il avait eu lieu.

De cette discussion je ne veux pas tirer de conclusion définitive : il semble que, par ce processus, la mort calorifique de l'Univers sera énormément retardée, mais on peut croire qu'elle ne sera que retardée [2].

---

[1] On peut, si l'on veut, placer ces deux masses aux deux foyers d'un miroir parfait ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution : de la sorte toute l'énergie rayonnée par l'une des masses est reçue par l'autre ; on a ainsi l'exemple d'un système *fini*, où le principe de Carnot ne tend pas à niveler les températures, au moins au début.

[2] Sur les tentatives d'extension du principe de Carnot-Clausius à l'Univers, on peut voir Bernard Brunhes : *La dégradation de l'Energie*, Ch. XXIV (Paris, Flammarion, 1909).

CHAPITRE XII.

LA VOIE LACTÉE ET LA THÉORIE DES GAZ (¹).

194. Nous allons, dans ce Chapitre, exposer des considérations dont la première idée remonte à Lord Kelvin.

Dans la théorie cinétique des gaz, une masse gazeuze est regardée comme un système formé d'un très grand nombre de points matériels (les molécules) s'entrecroisant dans tous les sens ; ces points matériels agissent à distance les uns sur les autres, mais cette action n'est sensible qu'à des distances extrêmement faibles et s'évanouit très vite lorsque la distance augmente.

Si nous envisageons l'ensemble de la Voie lactée, nous trouvons que cette nébuleuse est constituée de même par un grand nombre de points matériels (les étoiles) qui s'attirent l'un l'autre suivant la loi de Newton, et qui sont animés de vitesses de translation paraissant dirigées dans tous les sens. L'attraction newtonienne est très faible aux distances qui séparent ordinairement les étoiles ; aussi, peut-on considérer les trajectoires de celles-ci comme étant généralement rectilignes ; elles ne s'incurvent et ne se dévient que lorsque deux étoiles viennent à passer suffisamment près l'une de l'autre.

Nous pouvons donc, à un certain point de vue, dire que la Voie lactée tout entière est comparable à une masse gazeuse — aux dimensions près. Et, poussant plus loin l'assimilation, nous pouvons essayer de lui appliquer les théorèmes de la théorie cinétique des gaz.

195. Cherchons à nous faire une idée des dimensions de la Voie lactée par l'observation des mouvements propres des étoiles. De même que, dans une masse gazeuse libre en équilibre adiabatique, la pression

(¹) H. Poincaré : Voir *Bulletin de la Société astronomique de France*, avril 1906, p. 153-165 ; et *Science et Méthode*, Livre IV, Ch. I (*Bibliothèque de Philosophie Scientifique*, Paris, Flammarion, 1908).

et la température croissent de la superficie au centre, de même pour la Voie lactée, les vitesses propres moyennes doivent être plus considérables pour les étoiles des régions centrales que pour celles de la périphérie. Nous sommes justement situés vers le centre de la Voie lactée. En observant les vitesses propres des étoiles qui nous entourent, nous connaîtrons ce qui correspond à la température centrale de notre sphère gazeuse en équilibre adiabatique, et nous pourrons déterminer son rayon.

Comme nous ne pouvons pas avoir ici d'autre ambition que celle de déterminer un *ordre de grandeur*, nous ferons une hypothèse simplificatrice. La Voie lactée sera supposée sphérique et les masses des étoiles y seront réparties d'une façon homogène. Sans doute, cette hypothèse est loin de la réalité, mais les chiffres qu'elle nous fournira seront du même ordre que ceux qui correspondraient à des hypothèses plus voisines de la réalité.

Or, à l'intérieur d'une sphère homogène, un point matériel quelconque subit une attraction proportionnelle à la distance au centre et, par suite, décrit une ellipse ayant même centre que la sphère. Les équations de mouvement à l'intérieur d'une telle sphère sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha^2 y = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha^2 z = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha^2 = \frac{4}{3}\pi\rho,$$

ρ étant la densité de la sphère homogène.

Ces équations nous fournissent immédiatement l'intégrale des forces vives

$$\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \text{const.},$$

que nous écrirons

$$\alpha^2 r^2 + V^2 = \text{const.},$$

en appelant r la distance du point mobile au centre et V sa vitesse.

Appelons r_0 l'élongation maxima du mobile et supposons qu'au point correspondant la vitesse V soit nulle, ce qui correspond au cas d'une trajectoire rectiligne ; l'équation des forces vives s'écrira

$$\alpha^2 r^2 + V^2 = \alpha^2 r_0^2,$$

d'où

$$V^2 = \alpha^2 (r_0^2 - r^2).$$

Lorsque le mobile passera au centre ($r = 0$), sa vitesse sera donc

(1) $$V = \alpha r_0.$$

Revenons à la Voie lactée assimilée à une sphère homogène où toutes les étoiles décrivent des ellipses de même centre. Pour la plupart des étoiles, l'élongation maxima r_0 sera *du même ordre* que le rayon de la sphère, et la vitesse maxima V sera donnée par l'égalité (1). Donc, inversement, si dans cette égalité (1) nous donnons à V la valeur de la vitesse propre moyenne des étoiles voisines de nous (et qui, par conséquent, sont voisines du centre de la Voie lactée), nous trouverons pour r_0 le rayon de la Voie lactée, ou pour mieux dire son ordre de grandeur.

Mais, pour faire ce calcul, il faut d'abord connaître α, qui est proportionnel à la racine carrée de la densité fictive ρ. Si la masse du Soleil était uniformément répartie dans une sphère ayant pour rayon r_0 le rayon de l'orbite terrestre ($r_0 = 1$ unité astronomique), la vitesse maxima correspondant à cette élongation $r_0 = 1$ serait la vitesse ω de la Terre sur son orbite. L'équation (1) donnerait alors

$$\omega = \alpha.$$

Mais, pour que la densité de la Voie lactée devînt homogène, il faudrait répartir la masse du Soleil dans une sphère de rayon 10^6 fois plus grand, ce rayon étant à peu près la distance des étoiles les plus rapprochées. La densité ρ deviendrait donc 10^{18} fois plus faible ; par conséquent α, proportionnel à $\sqrt{\rho}$, deviendrait 10^9 fois plus petit. La valeur de α à adopter est donc

$$\alpha = \omega . 10^{-9},$$

et la formule (1) devient

$$V = \omega . 10^{-9} r_0.$$

L'observation montre que la vitesse propre moyenne V des étoiles voisines de nous est du même ordre que la vitesse ω de la Terre sur son orbite. L'équation précédente donne donc, pour l'ordre de grandeur du rayon de la Voie lactée ([1]),

$$r_0 = 10^9 \text{ unités astronomiques,}$$

soit environ 1000 fois la distance qui nous sépare des étoiles les plus rapprochées. Le nombre total des étoiles de la Voie lactée serait alors environ de 1000^3, soit 1 milliard.

Il est intéressant de constater que ce chiffre concorde à peu près avec les évaluations que l'on a pu déduire des observations au télescope et qui ont conduit à admettre l'existence de 200 millions d'étoiles : au point de vue qui nous occupe, 200 millions et 1 milliard ne doivent pas être regardés comme deux chiffres différents, puisqu'ils sont du même ordre de grandeur.

Certains auteurs ont prétendu que nos télescopes ne percent pas entièrement la Voie lactée et que, s'ils avaient une portée beaucoup plus grande, ils nous découvriraient beaucoup d'étoiles que nous ne voyons pas. Les considérations que nous venons de développer sont plutôt contraires à cette supposition, puisque le nombre des étoiles brillantes que l'on a « comptées » concorde avec le nombre qui a été « calculé ».

De même, ne pourrait-on pas supposer que le nombre des étoiles obscures est beaucoup plus grand que celui des étoiles brillantes? La même raison nous invite à croire que non. Si n désigne le rapport du nombre total des étoiles (tant obscures que brillantes) au nombre des étoiles brillantes, la densité ρ qui nous a servi à calculer α devra être multiplié par n ; α devra donc être multiplié par $\sqrt{n}$, et r_0 par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Nous aurions donc

$$r_0 = \frac{10^9}{\sqrt{n}}.$$

Le nombre total N des étoiles est de l'ordre de $\left(\frac{r_0}{10^6}\right)^3$, puisque 10^6 est la distance de deux étoiles voisines. Nous écrivons donc approxi-

([1]) Nous parlons du rayon de la Voie lactée comme si cette nébuleuse était sphérique; or, elle a plutôt la forme d'un disque aplati ; r_0 représentera sans doute une longueur intermédiaire entre l'épaisseur du disque et son rayon.

mativement

$$N = \left(\frac{r_0}{10^6}\right)^3$$

ou

$$10^6 \sqrt[3]{N} = r_0 = \frac{10^9}{\sqrt{n}}.$$

Si N est voisin de 1 milliard, n doit être voisin de l'unité. Les étoiles brillantes représenteraient la presque totalité des étoiles.

196. Dans ce qui précède, nous avons assimilé la Voie lactée à une sphère homogène. Si nous avions voulu nous rapprocher un peu plus de la réalité, nous aurions dû l'assimiler plutôt à une masse gazeuse en équilibre adiabatique : mais on sait que la loi adiabatique n'est pas la même pour tous les gaz, puisqu'elle dépend du rapport $\frac{C}{c}$ de leurs deux chaleurs spécifiques, et que ce rapport n'est pas le même pour les gaz monoatomiques que pour les gaz diatomiques ou polyatomiques. Auquel de ces gaz devrait-on comparer la Voie lactée ? A un gaz monoatomique évidemment. En effet, les molécules seraient ici les différents systèmes stellaires, et nous devons considérer qu'il y a *choc* chaque fois que deux de ces molécules passent assez près l'une de l'autre pour être déviées de leur route ; or, même si nous prenons une étoile multiple, l'action d'un astre étranger qui viendrait à en approcher deviendrait assez sensible pour dévier le mouvement de translation général du système, bien avant d'être capable de troubler les orbites relatives des composantes. En un mot, l'étoile multiple se comporterait comme un atome indivisible.

197. Posons-nous encore une autre question. La Voie lactée est-elle vraiment comparable à un gaz ordinaire, ou n'est-elle pas plutôt assimilable à la *matière radiante* de CROOKES ? On sait que le gaz renfermé dans un « tube de CROOKES » est tellement raréfié, que les chocs entre ses molécules sont relativement rares, et qu'une molécule a des chances de parcourir tout le tube sans être déviée de sa route : CROOKES disait alors que le *parcours moyen* des molécules est plus grand que les dimensions du tube et que la matière à l'intérieur du tube est à l'état *radiant*.

Qu'arrive-t-il pour la Voie lactée ? Une étoile a-t-elle des chances de la traverser sans subir de choc, c'est-à-dire sans passer *assez près*

d'une autre étoile pour être déviée de sa route? Que devons-nous entendre d'abord par *assez près*? Ces mots comportent forcément un peu d'arbitraire : nous conviendrons, par exemple, de dire qu'il n'y a pas choc si la distance entre deux étoiles reste supérieure au rayon de l'orbite de Neptune (ce qui pourrait représenter une déviation d'une dizaine de degrés). Imaginons alors chaque étoile entourée d'une « sphère de garde » ayant le rayon de l'orbite de Neptune : une droite pourra-t-elle passer entre ces sphères? A la distance moyenne des étoiles de la Voie lactée, le rayon d'une telle sphère serait vu sous un angle de $\frac{1}{10}$ de seconde environ; or, nous avons un milliard d'étoiles. Plaçons donc sur la sphère céleste un milliard de petits cercles de $\frac{1}{10}$ de seconde de rayon : recouvrirons-nous ainsi toute la sphère, et ces petits cercles empiéteront-ils les uns sur les autres? Loin de là, nous n'aurons recouvert que la $\frac{16}{1000}$ partie du Ciel.

Le *parcours moyen* d'une étoile est donc plus grand que les dimensions de la Voie lactée, et celle-ci ressemblerait plutôt à de la matière radiante qu'à un gaz.

198. Nous avons jusqu'ici assimilé la Voie lactée à une sphère. Or, elle offre plutôt l'apparence d'un disque aplati. Comment expliquer cet aplatissement? On peut faire à ce sujet des hypothèses bien différentes.

On peut d'abord supposer les étoiles animées de vitesses qui sont en majorité parallèles au plan galactique, mais d'ailleurs distribuées uniformément dans tous les sens parallèlement à ce plan. Un pareil état de choses ne pourrait être que provisoire et ne saurait se maintenir indéfiniment; car les « chocs » des molécules, ou pour mieux dire des étoiles, tendraient à distribuer les vitesses dans tous les sens conformément à la loi de MAXWELL, et, finalement, l'amas devait prendre la forme sphérique, qui est l'état normal d'une masse gazeuse libre.

Une seconde hypothèse est de supposer que la Voie lactée a une *rotation d'ensemble* entraînant un aplatissement définitif. On sait que, pour une masse fluide, de densité ρ, tournant avec une vitesse angulaire ω, il existe une certaine valeur du rapport

$$\frac{\omega^2}{\rho}$$

au delà de laquelle la force centrifuge à l'équateur l'emporte sur l'attraction : la figure d'équilibre correspondante est très aplatie, et, au delà, il n'y a plus de figure d'équilibre stable. Comme, pour la Voie lactée, la densité ρ est extrêmement faible, la vitesse angulaire limite ω sera très faible aussi : elle correspondrait environ à un tour complet en 500 millions d'années, soit $\frac{1}{5}$ de seconde d'arc par siècle. Un tel mouvement échapperait, bien entendu, complètement à l'observation : nous ne pourrions, en effet, nous en apercevoir qu'en visant des nébuleuses *extérieures* à la Voie lactée et ne participant pas à sa rotation (de même que nous nous apercevons du mouvement diurne de la Terre en visant les étoiles fixes extérieures à la Terre). Or, outre que le mouvement à mettre en évidence est extrêmement petit, les pointés sur les nébuleuses sont fort peu précis.

Il y a encore une autre hypothèse qui consiste à regarder la Voie lactée comme une nébuleuse spirale (¹). Considérons une masse gazeuse animée d'un mouvement de rotation de plus en plus rapide. Au début, la rotation étant nulle ou très faible, la figure de la masse gazeuse est sphérique ; la rotation s'accélérant, elle s'aplatit et prend une forme analogue (²) à l'ellipsoïde de MAC-LAURIN ; la rotation devenant encore plus rapide, l'aplatissement augmente, et la figure devient analogue à l'ellipsoïde de JACOBI. Si la rotation s'accroît encore, la force centrifuge aux deux extrémités du grand axe viendra à l'emporter sur l'attraction, et la matière s'échappera en deux jets à ces deux sommets : ces deux jets prendront évidemment une forme spirale, en vertu du principe des aires, l'*aile marchante* prenant un retard sur le *pivot*. Ainsi, la masse gazeuse offrira l'image d'une nébuleuse spirale, ses molécules représentant les étoiles dont se compose cette nébuleuse. Il ne paraît donc pas impossible d'expliquer les formes spirales des nébuleuses en ne faisant intervenir que la loi de gravitation et des considérations statistiques rappelant celles de la théorie des gaz.

(¹) Les nébuleuses spirales, quoiqu'irrésolubles, offrent un spectre continu. Aussi les considère-t-on généralement comme formées d'une multitude d'étoiles que leur éloignement empêche de distinguer. Elles seraient, en quelque sorte, d'autres voies lactées situées à des distances immenses.

(²) Nous disons *analogue*, car l'existence des figures ellipsoïdales de MAC-LAURIN et de JACOBI n'a été démontrée (nº **47**) que pour une masse fluide homogène, et notre gaz ne l'est pas.

199. Reprenons la comparaison de la Voie lactée avec une masse gazeuse. Si cette comparaison était tout-à-fait exacte, les vitesses des molécules, c'est-à-dire des étoiles, devraient être distribuées conformément à la loi de MAXWELL : par suite, dans une région quelconque du Ciel, les mouvements propres des étoiles qui peuplent cette région devraient nous paraître dirigés indifféremment dans tous les sens d'une façon parfaitement irrégulière (abstraction faite d'une même composante due au mouvement de translation du système solaire vers l'apex). Or, ce n'est pas ce qui arrive : les mouvements propres des étoiles d'une même région ont une tendance marquée à marcher dans *deux directions différentes*. M. KAPTEYN conclut de cette observation qu'il existe deux essaims d'étoiles, deux courants, ayant chacun une translation d'ensemble déterminée et *se pénétrant* mutuellement : à chacun de ces deux essaims, pris séparément, la loi de MAXWELL s'appliquerait ; mais les deux courants paraissent s'ignorer l'un l'autre. On peut les comparer à deux jets gazeux de directions différentes qui viennent à se rencontrer. Ces deux jets ne se mélangent pas tout de suite : au début, les molécules des deux espèces de gaz n'ont pas même vitesse moyenne ; mais, au bout de peu de temps, les deux jets gazeux se mélangent et ne forment plus qu'une seule masse. Si les deux courants d'étoiles qui constituent la Voie lactée sont restés distincts, c'est qu'ils n'ont pas encore eu le temps de se confondre en un seul : le temps nécessaire à ce mélange, excessivement court pour les deux jets gazeux, est au contraire énorme pour les courants d'étoiles, parce que, pour ces courants, le « parcours moyen » est très grand et les « chocs » très rares ; or, ce sont les chocs entre molécules gazeuses qui amènent le mélange des deux jets. La Voie lactée n'aurait donc pas encore atteint cet état d'équilibre statistique qui permettrait de l'assimiler à un gaz.

Dans la théorie des gaz, la loi de MAXWELL assigne aux molécules les plus grosses les plus faibles vitesses, et aux molécules les plus petites les plus grandes vitesses. Les étoiles les plus petites devraient donc offrir les plus forts mouvements propres. En particulier, les météorites, qui sont des astres très petits, devraient posséder des vitesses énormes ; or, les bolides ont bien en général des vitesses hyperboliques, mais ces vitesses sont presque toujours peu supérieures à la vitesse parabolique ; il faut donc conclure que les météorites n'ont pas encore eu le temps de prendre ces vitesses énormes que leur

assigne la théorie, et on est de nouveau amené à penser que la Voie lactée n'a pas encore atteint son état d'équilibre.

200. Aux deux essaims d'étoiles de M. Kapteyn, Schiaparelli adjoint un troisième essaim dont le Soleil ferait partie. La Voie lactée, d'après lui, se composerait donc de trois essaims ayant chacun leur translation d'ensemble. Les comètes seraient des membres infimes de ce troisième essaim. Ce serait pour cela que nous n'observerions pas de comètes nettement hyperboliques, puisque les comètes faisant partie de notre essaim auraient, en gros, le même mouvement de translation que nous. Schiaparelli s'écarte ainsi de l'opinion générale, d'après laquelle les comètes appartiennent au système solaire.

Lorsqu'une étoile ne présente pas de mouvement propre sensible, on en déduit habituellement qu'elle est très éloignée. Schiaparelli en tire une autre conclusion. Il la considère comme appartenant au troisième essaim ; son absence de mouvement propre proviendrait simplement de ce qu'elle possède à peu près la même translation que le Soleil, translation qui ne diffère pas sensiblement de celle du troisième essaim.

CHAPITRE XIII.

FORMATION DES NÉBULEUSES SPIRALES D'APRÈS M. SEE.

201. Dans l'Ouvrage que nous avons déjà cité[1], M. SEE s'est occupé de la formation des nébuleuses, en particulier de l'origine des nébuleuses spirales.

Imaginons deux nuages cosmiques N, N' à peu près égaux et cheminant en sens inverse (*fig.* 41, 1). Lorsqu'ils viennent à s'approcher l'un de l'autre, leurs extrémités les plus voisines s'allongent l'une vers

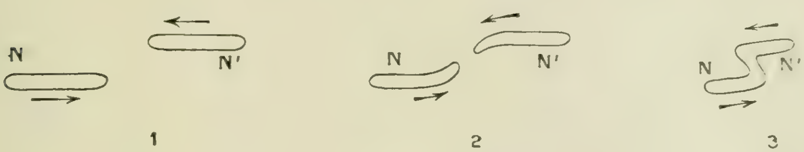


fig. 41.

l'autre par suite de l'attraction mutuelle (*fig.* 41, 2) et peuvent même finir par se réunir (*fig.* 41, 3) en un seul corps, vers le milieu duquel l'attraction, jointe aux frottements, tendra à produire une condensation, une sorte de noyau central. Les deux nuages primitifs N, N' tourneront dans le sens des flèches autour de ce centre, comme deux ailes de moulin.

Telle serait, d'après M. SEE, l'origine des nébuleuses spirales. Le noyau central aurait tendance à s'enrichir de plus en plus aux dépens de la matière des deux branche spirales N, N'. On voit donc que, pour M. SEE, le mouvement de la matière, dans les deux bras de la nébuleuse spirale, serait *centripète*, et non centrifuge, contrairement à l'opinion habituelle. Que le mouvement soit d'ailleurs convergent ou

[1] T. J. J. SEE : *Researches on the Evolution of the stellar Systems*, vol. II : *The capture Theory of cosmical Evolution*. Ch. XIX.

divergent, la loi des aires explique aussi bien dans les deux cas le retard de l'aile marchante sur le pivot, c'est-à-dire la forme spirale des deux ailes.

Il peut arriver que les deux extrémités des deux nuages N, N′ qui s'approchent l'un de l'autre ne se réunissent pas, mais soient seulement déviées par l'attraction : alors la phase qui suit la phase 2 de la figure 41 n'est pas la phase 3, mais la phase 4 (*fig.* 42), puis la phase 5. Nous assistons à la naissance d'une nébuleuse *annulaire* telle que la nébuleuse de la Lyre. M. See voit dans les deux parties floues diamétralement opposées que présente l'anneau de la Lyre un argument à l'appui de cette théorie : les extrémités des deux nuages N, N′ ne se seraient pas parfaitement soudées.

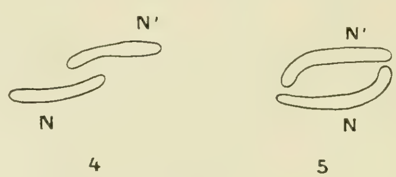


fig. 42.

Une nébuleuse annulaire se forme donc, d'après M. See, par le même mécanisme que les nébuleuses spirales, dont elle se trouve ainsi être en quelque sorte un cas particulier. Mais la forme annulaire est fort rare, parce que les conditions de formation d'un anneau parfait ne sont pas souvent réalisées.

On peut faire à cette théorie une grave objection. Les deux bras d'une nébuleuse spirale sont en général à peu près symétriques. Dans l'hypothèse habituelle où l'on suppose le mouvement sur ces bras divergent, cette symétrie peut s'expliquer puisque les deux bras ont une origine commune. Dans l'hypothèse de M. See, on ne voit aucune raison pour en rendre compte, car les deux nuages cosmiques N et N′ qui engendrent la nébuleuse et qui se sont rencontrés par hasard, ne seront pas égaux en général : ils devraient donc donner naissance à une nébuleuse dissymétrique.

202. M. See pense qu'à l'origine le système solaire était une nébuleuse spirale d'une grande extension. La matière, à son intérieur, s'est d'abord agglomérée en particules qui, la résistance de milieu aidant, par le mécanisme exposé au Chapitre VI, se sont condensées

en astéroïdes, puis en planètes, celles-ci se nourrissant par bombardement [1].

Par analogie, M. See est amené à croire que les nébuleuses spirales, moins avancées dans leur évolution que le système solaire, sont remplies d'un très grand nombre d'astres très petits comme les planètes ou même la Lune. Si nous ne pouvons pas « résoudre » ces nébuleuses, ce serait à cause de la petitesse extrême des composantes, et non pas parce que ces objets célestes sont excessivement éloignés : M. Bohlin a essayé de mesurer la parallaxe de la nébuleuse d'Andromède (qui est une nébuleuse spirale à spectre continu), et il l'a trouvée égale à $0'',17$, de sorte que cette nébuleuse serait relativement très près de nous. Mais, étant donné le peu de précision que comportent les pointés sur les nébuleuses, doit-on considérer cette observation comme définitive et certaine ?

---

[1] M. See voit, dans les cratères lunaires, les empreintes d'un bombardement produit à la surface de la Lune par la chute d'un grand nombre de petits satellites. Il compare ces cratères aux empreintes laissées par de grosses gouttes de pluie sur le sol (*loc. cit*, p. 342, Planche XII).

CHAPITRE XIV.

HYPOTHÈSE DE M. É. BELOT.

203. Selon M. É. Belot (¹), les chocs et les tourbillons jouent, en Cosmogonie, un rôle essentiel et sont les deux facteurs principaux de la formation des mondes. La production effective de chocs dans l'univers cosmique nous est prouvée par l'apparition des *Novae*; quant aux mouvements tourbillonnaires, les nébuleuses spirales nous montrent qu'ils existent réellement dans la nature.

Le système solaire, dans la théorie de M. Belot, serait dû au choc d'un *tube-tourbillon* contre un nuage cosmique. Autrement dit, une nébuleuse animée d'un mouvement tourbillonnaire, venant heurter une nébuleuse amorphe, s'y serait épanouie et transformée en notre système solaire.

Lord Kelvin et M. J.-J. Thomson ont montré qu'un tourbillon se comporte comme un corps élastique : il est susceptible de vibrer sous un choc. Il possède une stabilité telle qu'elle va parfois jusqu'à la rigidité (rigidité gyrostatique).

Imaginons, avec M. Belot, qu'une nébuleuse ayant la forme d'un tube-tourbillon vienne heurter en B un nuage cosmique AA', à la façon d'un obus frappant une plaque de blindage, comme il est représenté sur la figure 43 que nous empruntons à l'Ouvrage de M. Belot. Par suite du choc, le tube, en vertu de son élasticité virtuelle, va se mettre à vibrer longitudinalement ; cette onde longitudinale, se réflé-

(¹) É. Belot : Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1905-1906-1908 ; — Bulletin de la Société astronomique de France 1907 ; — Journal de l'École Polytechnique 1908 ; — Comptes rendus des Congrès tenus en 1908 et en 1909 par l'Association française pour l'Avancement des Sciences.

M. Émile Belot a rassemblé et développé ses idées cosmogoniques dans un Ouvrage intitulé : *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire* (Paris, Gauthier-Villars, 1911, 1 vol. in-8°).

chissant à l'extrémité postérieure du projectile, donnera lieu à une onde stationnaire, de telle façon que nous aurons, le long du tube, une série de *nœuds* et de *ventres* équidistants. Chaque ventre viendra à son tour frapper le nuage cosmique AA'.

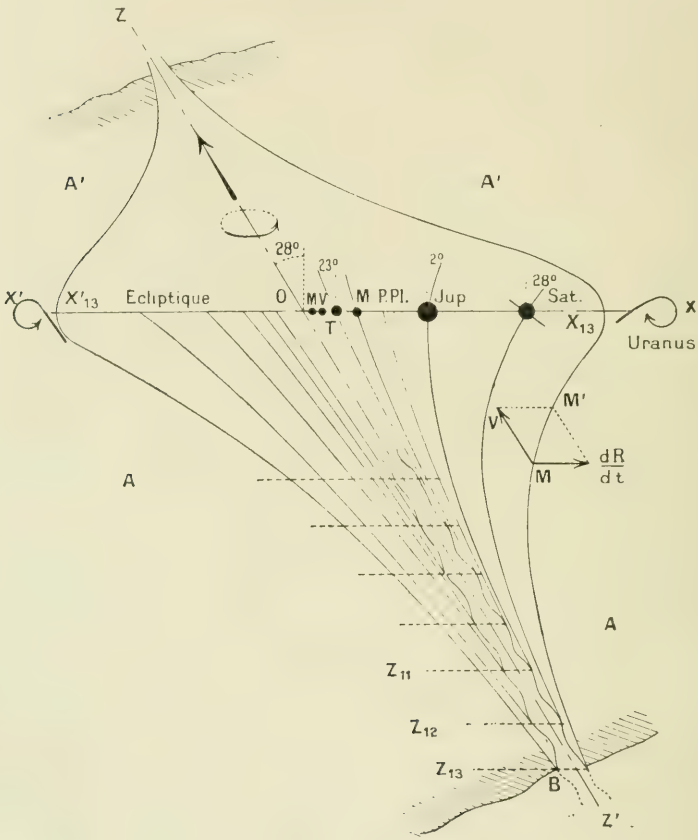


fig. 43.

Le tourbillon primitif serait l'origine du Soleil, les ventres seraient l'origine des différentes planètes. Quant aux molécules du tourbillon, elles ne peuvent quitter celui-ci en majeure partie qu'aux ventres où le rayon est dilaté, et elles décrivent alors des spires s'épanouissant sur une surface évasée, appelée *nappe tourbillonnaire*.

Prenons pour axe des z la direction Z'OZ de la translation du

tourbillon dans le nuage cosmique, direction qui n'est autre que celle de l'apex. Le plan des $x\,y$, oblique à l'axe des z, sera pris parallèle à l'écliptique, auquel M. Belot suppose que le plan de rotation du tourbillon primitif était parallèle.

Une molécule quelconque M d'une nappe tourbillonnaire subit de la part du nuage cosmique une résistance de milieu qu'on peut supposer proportionnelle au carré de la vitesse. Comme la vitesse avec laquelle le tube-tourbillon est venu frapper la nébuleuse amorphe est excessivement grande (M. Belot estime, peut-être un peu arbitrairement, qu'elle serait de l'ordre de 75 000 kilomètres par seconde), la composante

$$V = \frac{dz}{dt}$$

de la vitesse de M parallèlement à OZ est incomparablement supérieure à ses autres composantes; la résistance opposée au mouvement, qui est supposée proportionnelle au carré de la vitesse, est assez grande pour que l'on puisse négliger devant elle toutes les autres forces; si bien que l'on peut écrire

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{K_1}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$\frac{1}{K_1}$ désignant le coefficient de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Cette équation s'écrit

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{K_1} V^2,$$

ou encore

$$\frac{dt}{K_1} + \frac{dV}{V^2} = 0.$$

Intégrant, il vient

$$(1)' \qquad \frac{t}{K_1} - \frac{1}{V} = -\frac{1}{W_1},$$

W_1 désignant la valeur initiale de la vitesse de translation V à l'instant ($t = 0$) du choc.

Nous pouvons aussi, de l'équation (1), tirer la valeur de z : nous avons

$$dV = -\frac{1}{K_1} V^2 dt$$

$$= -\frac{1}{K_1} V dz;$$

par suite

$$dz = - K_1 \frac{dV}{V},$$

et

$$(2) \qquad z = K_1 \log \frac{W_1}{V};$$

nous avons pris, comme plan $z = 0$, celui du choc, pour lequel $V = W_1$.

Mais, dans le tourbillon primitif, chaque molécule décrit une hélice ; par suite, si Ω est l'angle mesurant, dans le plan XOY, l'azimut de la molécule, on peut écrire

$$(3) \qquad z = BK_1\Omega,$$

en appelant BK_1 un coefficient constant.

M. Belot admet que cette équation (3), qui représente la trajectoire hélicoïdale avant le choc, reste encore satisfaite après le choc dans la nappe tourbillonnaire qui émane du tourbillon : mais les hélices décrites dans la nappe auront un rayon R de plus en plus grand, en raison de la vitesse d'expansion radiale $\frac{dR}{dt}$ dont nous allons nous occuper.

L'équation (3), différentiée en t, donne

$$(4) \qquad \frac{dz}{dt} = BK_1 \frac{d\Omega}{dt},$$

ou

$$(5) \qquad V = BK_1\omega,$$

en appelant

$$\omega = \frac{d\Omega}{dt}$$

la vitesse angulaire de la molécule M.

204. Etudions, avec M. Belot, le *profil* de la nappe tourbillonnaire qui s'épanouit et s'évase en forme de tulipe. Cette tendance à l'épanouissement est due principalement à deux causes ; d'une part, à l'impulsion radiale presque instantanée qui, dans le choc, porte le rayon du tourbillon (à un ventre) de sa valeur initiale a à une valeur plus grande $a + \varepsilon$; d'autre part, à une force répulsive due à

la pression de radiation, le choc ayant dégagé une grande quantité de chaleur et de lumière.

Appelant R la distance (comptée parallèlement au plan XOY) de la molécule M à l'axe ZZ' du tourbillon, M. Belot pose, peut-être un peu arbitrairement,

$$\frac{dR}{dt} = B_1\omega(R - a),$$

B_1 étant un coefficient constant. La vitesse d'expansion $\frac{dR}{dt}$ s'annule en effet pour $R = a$, puisqu'on est alors dans la position primitive du tourbillon. De cette équation nous tirons

$$\frac{dR}{R - a} = B_1 d\Omega,$$

ce qui s'écrit, d'après l'équation (4),

$$\frac{dR}{R - a} = \frac{B_1}{BK_1} dz.$$

Telle est l'équation qui relie le rayon R de la section circulaire de la nappe, à l'ordonnée z. C'est, si l'on veut, l'équation différentielle du profil de la nappe.

Intégrant, il vient

$$z = \frac{BK_1}{B_1} \log \frac{R - a}{\varepsilon}, \tag{6}$$

ε désignant la valeur initiale du renflement $R - a$ du tourbillon au ventre considéré.

Dans ce calcul, M. Belot n'a pas tenu compte de l'attraction, qui devient cependant très prépondérante dès que le Soleil a commencé à se former. Dans un calcul plus exact, il y aurait sans doute lieu d'introduire cette attraction. En effet, dans les calculs précédents, nous avons traité les différentes masses, comme si elles étaient indépendantes et on ne voit pas bien pourquoi elles se trouveront finalement à peu près dans un même plan (celui de l'écliptique). Si les calculs de M. Belot le conduisent à expliquer en apparence ce fait important, c'est par suite d'hypothèses qui paraissent mal justifiées, et auxquelles l'Auteur n'aurait jamais songé, s'il n'avait pas connu ce résultat d'avance. Au contraire, en tenant compte, dès le début, de l'attraction solaire, on arrive tout naturellement au même but.

205. Comparons les équations (2) et (6). En posant

$$\frac{B_1}{B} = b,$$

nous aurons

$$\log \frac{R - a}{\varepsilon} = b \log \frac{V_1}{V},$$

ce qui peut s'écrire

$$V^b (R - a) = \text{const.}$$

ou encore, puisque d'après l'équation (5) V est proportionnel à ω,

$$\omega^b (R - a) = \text{const.}$$

Cette formule correspond, dans la période de formation du système, à la troisième loi de Képler, sur laquelle on retombe en faisant $a = 0$ (condensation finale du tourbillon) et $b = \frac{2}{3}$.

206. M. Belot cherche quelle sera la loi des distances planétaires. C'est la relation (6) entre z et R qui va nous renseigner à ce sujet. Cette relation nous apprend que le profil de chaque nappe est une courbe logarithmique. Chacun des ventres va être l'origine d'une nappe venant couper l'écliptique suivant un cercle, et chaque nappe donnera naissance à une planète.

Comme, par hypothèse, les différents ventres sont équidistants sur le tube-tourbillon, nous devons donner à z dans la formule (6) des valeurs en progression arithmétique. Il en résulte, pour $R - a$, des valeurs en progression géométrique. C'est la loi exponentielle des distances planétaires, analogue à la loi de Bode.

La formule donnée par M. Belot est (en unités astronomiques) :

$$x_n - 0{,}28 = \frac{1}{214{,}45} \cdot 1{,}883^n,$$

au lieu de celle de Bode

$$x_n - 0{,}4 = 0{,}3 \cdot 2^n.$$

Une difficulté se présente ici : au moment de la formation des planètes, la nébuleuse n'était sans doute pas encore condensée. Pendant la condensation, la loi d'attraction a varié, et, comme nous l'avons

expliqué à propos de la théorie de FAYE, les distances des planètes ont dû varier également. La question est de savoir si la loi de BODE, si on la suppose vérifiée à l'origine, a pu rester vraie pendant cette variation.

207. Nous allons écrire, avec M. BELOT, la condition pour que toutes les nappes arrivent simultanément dans le plan de l'écliptique.

Appelons V_n la vitesse de translation de la nappe de rang n au moment où elle arrive dans l'écliptique, W_n sa vitesse de translation au contact du tourbillon en Z_n. Soient t_n le temps mis par la nappe de rang n à venir de Z_n à l'écliptique; τ_n le temps mis par le tourbillon primitif à aller du plan Z_n au plan Z_{n-1}. Il faudra qu'on ait

$$t_n = \tau_n + t_{n-1}. \tag{7}$$

D'après l'équation (1) on aura

$$\frac{\tau_n}{K_1} + \frac{1}{W_n} = \frac{1}{W_{n-1}}. \tag{8}$$

Les t_n satisfont à l'équation (2) qui peut s'écrire d'après l'équation (1)'

$$z = K_1 \log\left(\frac{W_1}{K_1} t + 1\right),$$

ou

$$\frac{W_1}{K_1} t + 1 = e^{\frac{z}{K_1}};$$

on a donc

$$\frac{W_n}{K_1} t_n + 1 = e^{\frac{z_n}{K_1}} = e^{\frac{n z_1}{K_1}}, \tag{9}$$

$$\frac{W_{n-1}}{K_1} t_{n-1} + 1 = e^{\frac{z_{n-1}}{K_1}} = e^{\frac{(n-1) z_1}{K_1}}. \tag{10}$$

Eliminant t_n, t_{n-1}, τ_n entre les quatre équations (7), (8), (9), (10), on trouve

$$W_n = e^{\frac{z_1}{K_1}} W_{n-1}.$$

J'ai dit plus haut que les hypothèses qui servent de point de départ à ce calcul me paraissent un peu arbitraires, et qu'en tenant

compte dès le début de l'attraction solaire, on arriverait à une explication toute naturelle.

208. Mais comment chaque nappe tourbillonnaire va-t-elle donner naissance à une planète? Revenons à la figure 43. Supposons que la nébuleuse amorphe AA' possède elle-même une vitesse de translation perpendiculaire au plan de la figure et dirigée d'arrière en avant. La rotation du tourbillon étant supposée de sens direct, il y aura maximum de conflit de vitesse précisément dans le plan ZOX de la figure, et du côté OX, puisque, en cet endroit, la vitesse tangentielle des nappes sera directement opposée à la vitesse translatoire de la nébuleuse.

C'est donc vers OX que les nappes se transformeront en tourbillons planétaires. Telle est, d'après M. Belot, l'origine des planètes.

Quant aux satellites, ils sont formés par le tourbillon planétaire, de même que les planètes ont été formées par le tourbillon principal.

209. Sur la figure 43, nous voyons que les profils des nappes successives coupent, sur OX, l'écliptique sous certains angles; et ces angles se trouvent coïncider sensiblement avec ceux que les axes de rotation des planètes font avec l'écliptique (¹). Cette coïncidence s'explique, puisque, dans la théorie actuelle, on admet que les tourbillons planétaires se sont tous formés du côté OX et que l'axe de chaque tourbillon est resté tangent à la nappe correspondante.

La position de l'axe d'Uranus, presque couché dans le plan de l'écliptique, est expliquée de la façon suivante : la projection rapide du tourbillon principal $Z_{13}X_{13}$ dans le nuage cosmique aurait déterminé la formation d'un *tore-tourbillon* analogue à un anneau de fumée; c'est cet anneau-tourbillon qui aurait engendré Uranus.

210. Disons encore qu'à la *loi des distances* et à la *loi des inclinaisons*, M. Belot joint une *loi des rotations*, c'est-à-dire une formule donnant la durée de rotation (directe) d'un astre du système solaire, en fonction de son diamètre et de sa densité.

M. Belot essaie enfin, par un mécanisme analogue (nébuleuse tourbillonnaire venant frapper un nuage cosmique), mais en variant

(¹) La distance BO est inconnue *à priori* : or, les angles en question dépendent évidemment de cette distance; c'est précisément comme conséquence de la loi des inclinaisons que M. Belot la trouve égale à 81 rayons de l'orbite terrestre.

de différentes façon les conditions initiales, d'expliquer la formation des différents systèmes sidéraux (étoiles multiples, nébuleuses spirales, ...) que nous offre l'observation du ciel. Pour ces points, nous renverrons aux Écrits de l'Auteur.

211. Quelles que soient les critiques que nous ayons cru devoir formuler sur divers points de cette théorie, cette tentative mérite l'attention. Si on peut reprocher à M. Belot d'avoir été un peu plus ambitieux qu'il ne convient de l'être dans l'état actuel de la Science et d'avoir voulu prématurément trop embrasser, et si ses idées ne semblent pas pouvoir être acceptées sous leur forme actuelle, il semble qu'il peut être utile de les faire connaître, parce qu'on pourra un jour y trouver à glaner d'intéressantes vérités.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

HYPOTHÈSE DE H. FAYE.

CHAPITRE V.

HYPOTHÈSE DE M. DU LIGONDÈS.

CHAPITRE VI.

HYPOTHÈSE DE M. SEE.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DE SIR G.-H. DARWIN.

I. *Généralités.*

II. *L'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire sont supposées nulles.*

III. *Cas général.*

II. *Chaleur terrestre.*

III. *Equilibre adiabatique d'un gaz parfait.*

CHAPITRE IX.

THÉORIE DE SIR NORMAN LOCKYER.

CHAPITRE X.

THÉORIE DE M. SCHUSTER.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DE M. ARRHENIUS.

CHAPITRE XII.

LA VOIE LACTÉE ET LA THÉORIE DES GAZ.

CHAPITRE XIII.

FORMATION DES NÉBULEUSES SPIRALES D'APRÈS M. SEE.

CHAPITRE XIV.

HYPOTHÈSE DE M. É. BELOT.

INDEX ALPHABÉTIQUE.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

V.

W.

Z.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.

ERRATA

Page 95, note (1) : au *lieu* de : (Ch. VIII, n° 171).
lire : (Ch. VIII, n° 168).

Page 262, *ligne* 14 ; au *lieu* de : $\frac{16}{1\,000}$.
lire : $\frac{1}{16\,000}$.

T.

V.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.